



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

180) Die Abbildung $Z=z^3$

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77934](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77934)

Kreisschar. Die lemniskatische Abbildung verwandelt das Strahlenbündel nebst konzentrischer Kreisschar in das Bündel gleichseitiger Hyperbeln nebst konfokaler Lemniskatenschar, das Kreisbündel nebst orthogonaler Kreisschar in das in Fig. 129 dargestellte Lemniskatenbündel nebst orthogonaler Lemniskatenschar, die Parallelenschar in Scharen gleichseitiger Hyperbeln.

Die Abbildung $Z = z^2$, d. h. die Umkehrung der lemniskatischen Abbildung verwandelt die Parallelenschar in ein System konfokaler Parabeln, das Strahlenbündel nebst konzentrischer Kreisschar in ein Bündel von Parabeln nebst kardioidischer Schar. Man kann diese Transformation als die kardioidische Abbildung bezeichnen. (Vergl. Ing.-Math. Band I, Abschnitt VI.)

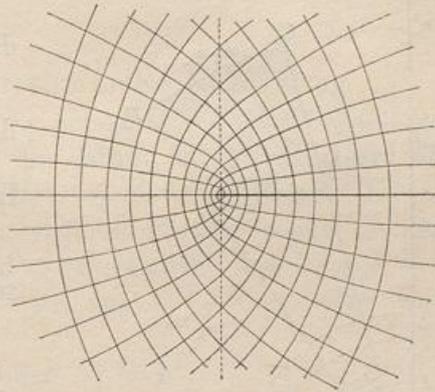


Fig. 131.

180) Die Abbildung $Z = z^3$ ist entsprechend zu behandeln. Ist $OA = 1$ und $OA_1 = r_1$ eine beliebige Strecke, so vollende man Dreieck OAA_1 und setze darauf ein ähnliches OA_1A_2 , darauf wiederum ein ähnliches OA_2A_3 . Dann ist

$$OA_2 = r_1^2, \quad OA_3 = r_1^3,$$

zugleich ist

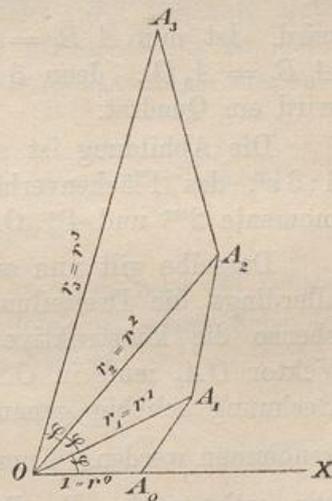
$$\sphericalangle AOA_3 = 3 \cdot \sphericalangle AOA_1.$$

Dies entspricht der Moivreschen Formel

$$\begin{aligned} [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^3 \\ = r^3 (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi). \end{aligned}$$

Man nennt die Strecke OA_3 (Strecke ist die nach Länge und Richtung bestimmte Gerade) die dritte Potenz der Strecke OA_1 . So kann man zu jedem Punkte A_1 den zugehörigen A_3 finden. Konzentrische Kreise um O gehen dabei wieder in solche über, Strahlen durch O wieder in Strahlen durch O . Kurven $f(R, \Phi) = 0$ gehen über in Kurven $f(r^n, n\varphi) = 0$, Kurven $f(\sqrt[n]{R}, \frac{\Phi}{n}) = 0$ in Kurven $f(r, \varphi) = 0$.

Fig. 132.



Der quadratische Charakter der Einteilung mittels Strahlenbündel und konzentrischer Kreisschar bleibt erhalten. Das „Quadrat“

$A_1 B_1 C_1 D_1$ verwandelt sich in einen „Rechtecksraum“ $A_3 B_3 C_3 D_3$. Dabei sei

$$OA_1 = r, \quad A_1 D_1 = r\alpha,$$

dann wird

$$OA_3 = r^3, \quad A_3 D_3 = 3r^3\alpha,$$

d. h.

$$A_3 D_3 = 3r^2 \cdot A_1 D_1.$$

Ist nun

$$A_1 B_1 = d \quad \text{also} \quad OB_1 = r + d,$$

so wird

$$OB_3 = (r + d)^3$$

$$= r^3 + 3r^2d + 3rd^2 + d^3,$$

also

$$A_3 B_3 = OB_3 - OA_3$$

$$= (r^3 + 3r^2d + 3rd^2 + d^3) - r^3$$

$$= 3r^2d + 3rd^2 + d^3.$$

Ist nun d sehr klein, so kann man $3rd^2 + d^3$ als unendlich klein 2^{ter} bzw. 3^{ter} Ordnung gegen $3r^2d$ vernachlässigen, so daß

$$A_3 B_3 = 3r^2d = 3r^2 \cdot A_1 B_1$$

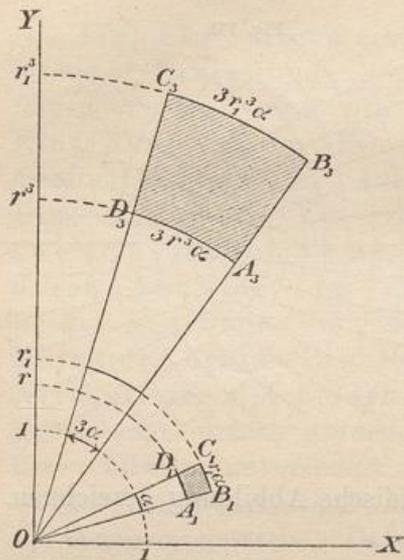
wird. Ist nun $A_1 B_1 = A_1 D_1$ d. h. $A_1 B_1 C_1 D_1$ ein Quadrat, so wird $A_3 B_3 = A_3 D_3$, (denn $3r^2 \cdot A_1 B_1 = 3r^2 A_1 D_1$), d. h. auch $A_3 B_3 C_3 D_3$ wird ein Quadrat.

Die Abbildung ist also eine konforme. Das Bogenverhältnis ist $1:3r^2$, das Flächenverhältnis $1:9r^4$. Die Folgerungen für Polarmomente 2^{ter} und 4^{ter} Ordnung liegen auf der Hand.

Dasselbe gilt nun auch von ihrer Umkehrung $Z = \sqrt[3]{z}$, bei der allerdings die Dreiteilung des Winkels vorausgesetzt werden muß, ebenso die konstruktive Darstellung der dritten Wurzel, denn der Vektor OA_3 muß in OA_1 verwandelt werden. Da dies mit Hilfe der Rechnung beliebig genau geschehen kann, soll diese Möglichkeit angenommen werden. Kurven $f(r, \varphi) = 0$ gehen über in $f(\sqrt[3]{r}, \frac{\varphi}{3}) = 0$.

Die orthogonalen Parallelscharen verwandeln sich in orthogonale Hyperbelscharen 3^{ter} Ordnung, das Strahlenbündel und die konzentrische Kreisschar um einen beliebigen Punkt in ein Hyperbelbündel 3^{ter} Ordnung nebst Lemniskatenschar 3^{ter} Ordnung, wobei die 3 Brennpunkte (Wurzelpunkte) auf einem Kreise liegen und ein gleichseitiges

Fig. 133.



Dreieck bilden; das Kreisbüschel und die orthogonale Kreisschar gehen über in das Büschel der Lemniskaten 3^{ter} Ordnung nebst Orthogonal-schar, welches in Fig. 130 dargestellt ist, u. s. w. So erhält man weitere Strömungsprobleme und kann ebenso zu $Z = z^n$ und $Z = \sqrt[n]{z}$ übergehen.

181) Rückblick auf die logarithmische Abbildung.

Von besonderer Wichtigkeit ist die schon in Nr. 115 behandelte logarithmische Transformation, die darauf beruht, daß man an Stelle von $X = a$ einsetzt $\lg r = a$ oder $r = e^a$, an Stelle von $Y = b$ dagegen den Bogen $\vartheta = b$. Dadurch wird die Parallelenschar in das System konzentrischer Kreise nebst Radien verwandelt. Aus $X_1 = a + d$ wird $\lg r_1 = a + d$, so daß $r_1 = e^{a+d}$ wird, aus $X_1 - X = d$ also wird

$$\lg r_1 - \lg r = d \quad \text{oder} \quad \frac{r_1}{r} = e^d,$$

so daß

$$\begin{aligned} r_1 = r e^d \quad \text{und} \quad r_1 - r &= r(e^d - 1) = r \left(1 + \frac{d}{1} + \frac{d^2}{1 \cdot 2} + \dots - 1 \right) \\ &= r d \left(1 + \frac{d}{1 \cdot 2} + \frac{d^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \right) \end{aligned}$$

wird. Für unendlich kleines d wird also die eine Rechtecksseite gleich rd . Aus $Y_1 = b + d$ ergibt sich $\vartheta_1 = b + d$, aus $Y_1 - Y = d$ also $\vartheta_1 - \vartheta = d$, für den Radius r also ebenfalls rd . Demnach geht ein kleines Quadrat in ein kleines Quadrat über. Damit ist auch dieser Übergang auf eine Transformation zurückgeführt, die mit der Formel

$$\begin{aligned} X + Yi &= \lg [r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)] = \lg r + \lg(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \\ &= \lg r + \lg e^{\vartheta i} = \lg r + \vartheta i \end{aligned}$$

zusammenhängt, wobei $X = \lg r$ und $Y = \vartheta$ wird, da man die reellen Teile und ebenso die imaginären einander gleich zu setzen hat. In beiden Ebenen entsprechen einander folgende Kurven:

Z-Ebene.	z-Ebene.
1) $f(X, Y) = 0$	$\begin{cases} f(\lg r, \vartheta) = 0 \\ \text{oder } f\left(\lg \sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x}\right) = 0. \end{cases}$
2) $f(e^X, Y) = 0$	$\begin{cases} f(r, \vartheta) = 0 \\ \text{oder } f\left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x}\right) = 0. \end{cases}$