Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

181) Rückblick auf die logarithmische Abbildung

Dreieck bilden; das Kreisbüschel und die orthogonale Kreisschar gehen über in das Büschel der Lemniskaten 3ter Ordnung nebst Orthogonalschar, welches in Fig. 130 dargestellt ist, u. s. w. So erhält man weitere Strömungsprobleme und kann ebenso zu $Z = z^n$ und $Z = \sqrt[n]{z}$ übergehen.

181) Rückblick auf die logarithmische Abbildung.

Von besonderer Wichtigkeit ist die schon in Nr. 115 behandelte logarithmische Transformation, die darauf beruht, dafs man an Stelle von $X = a$ einsetzt $\lg r = a$ oder $r = e^a$, an Stelle von $Y = b$ dagegen den Bogen $\vartheta = b$. Dadurch wird die Parallelenschar in das System koncentrischer Kreise nebst Radien verwandelt. Aus $X_1 = a + d$ wird $\lg r_1 = a + d$, so dafs $r_1 = e^{a+d}$ wird, aus $X_1 - X = d$ also wird

$$\lg r_1 - \lg r = d \quad \text{oder} \quad \frac{r_1}{r} = e^d,$$

so dafs

$$r_1 = re^d \quad \text{und} \quad r_1 - r = r(e^d - 1) = r\left(1 + \frac{d}{1} + \frac{d^2}{1 \cdot 2} + \cdots - 1\right)$$
$$= rd\left(1 + \frac{d}{1 \cdot 2} + \frac{d^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots\right)$$

wird. Für unendlich kleines d wird also die eine Rechtecksseite gleich $\boldsymbol{rd}$. Aus $Y_1 = b + d$ ergiebt sich $\vartheta_1 = b + d$, aus $Y_1 - Y = d$ also $\vartheta_1 - \vartheta = d$, für den Radius r also ebenfalls $\boldsymbol{rd}$. Demnach geht ein kleines Quadrat in ein kleines Quadrat über. Damit ist auch dieser Übergang auf eine Transformation zurückgeführt, die mit der Formel

$$X + Yi = \lg[r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)] = \lg r + \lg(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$
$$= \lg r + \lg e^{\vartheta i} = \lg r + \vartheta i$$

zusammenhängt, wobei $X = \lg r$ und $Y = \vartheta$ wird, da man die reellen Teile und ebenso die imaginären einander gleich zu setzen hat. In beiden Ebenen entsprechen einander folgende Kurven:

Z-Ebene.	z-Ebene.
1) $f(X, Y) = 0$	$f(\lg r, \vartheta) = 0$ oder $f\left(\lg\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\frac{y}{x}\right) = 0.$
2) $f(e^X, Y) = 0$	$f(r, \vartheta) = 0$ oder $f\left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\frac{y}{x}\right) = 0.$

Z-Ebene.	z-Ebene.
3) $f(e^X, e^Y) = 0$	$\begin{cases} f(r, e^{\vartheta}) = 0 \\ \text{oder } f\left(\sqrt{x^2+y^2}, e^{\arctan\frac{y}{x}}\right) = 0. \end{cases}$
4) $f(e^X \cos Y, e^X \sin Y) = 0$	$f(xy) = 0.$
5) $f(R, \Theta) = 0$	$f\left[\sqrt{(\lg r)^2 + \vartheta^2}, \arctan\frac{\vartheta}{\lg r}\right] = 0.$

Aus der umgekehrten Abbildung

$$x + yi = e^{X+Yi} = e^X \cdot e^{Yi} = e^X(\cos Y + i \sin Y)$$

folgt nämlich

$$x = e^X \cos Y, \quad y = e^X \sin Y.$$

Aufserdem ist nach 1)

$$R^2 = X^2 + Y^2 = (\lg r)^2 + \vartheta^2, \quad \Theta = \arctan\frac{Y}{X} = \arctan\frac{\vartheta}{\lg r}\cdot$$

Dadurch ist man imstande, aus jeder beliebigen Kurvenschar der einen Ebene die entsprechende der anderen leicht abzuleiten.

182) Ein Beispiel von praktischer Bedeutung. Das Kreisbüschel durch die Punkte $x = o$ und $x = +a$ auf der x-Achse der z-Ebene soll durch die Abbildung $Z = \lg z$ in die Z-Ebene übertragen werden. Dasselbe soll mit der orthogonalen Kreisschar geschehen.

Das Kreisbüschel hat die Gleichung

$$\vartheta_1 - \vartheta = c \quad \text{oder} \quad \arctan\frac{y}{x-a} - \arctan\frac{y}{x} = c.$$

Die linke Seite läfst sich schreiben

$$\arctan\left(\frac{\frac{y}{x-a} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x-a}\cdot\frac{y}{x}}\right) = \arctan\frac{a}{x^2 - ax + y^2} = \arctan\frac{a}{r^2 - ar\cos\vartheta}$$

Die Gleichung

$$\arctan\frac{a}{r^2 - ar\cos\vartheta} = c \quad \text{oder} \quad \frac{a}{r^2 - ar\cos\vartheta} = \tan c$$

geht über in

$$1) \quad \frac{a}{e^{2X} - ae^X\cos Y} = \tan c \quad \text{oder} \quad \arctan\frac{a}{e^{2X} - ae^X\cos Y} = c.$$

Die Kreisschar hat die Gleichung

$$\frac{r}{r_1} = e^c \quad \text{oder} \quad \frac{r}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} = e^c$$