Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

182) Ein Beispiel von praktischer Bedeutung

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

Z-Ebene. $\qquad\qquad$ z-Ebene.

3) $f(e^X, e^Y) = 0$ $\qquad$ $\begin{cases} f(r, e^{\vartheta}) = 0 \\ \text{oder } f\left(\sqrt{x^2+y^2},\ e^{\arctan\frac{y}{x}}\right) = 0. \end{cases}$

4) $f(e^X \cos Y, e^X \sin Y) = 0$ $\qquad$ $f(xy) = 0.$

5) $f(R, \Theta) = 0$ $\qquad$ $f\left[\sqrt{(\lg r)^2 + \vartheta^2},\ \arctan\frac{\vartheta}{\lg r}\right] = 0.$

Aus der umgekehrten Abbildung

$$x + yi = e^{X+Yi} = e^X \cdot e^{Yi} = e^X(\cos Y + i \sin Y)$$

folgt nämlich

$$x = e^X \cos Y, \quad y = e^X \sin Y.$$

Außerdem ist nach 1)

$$R^2 = X^2 + Y^2 = (\lg r)^2 + \vartheta^2, \quad \Theta = \arctan\frac{Y}{X} = \arctan\frac{\vartheta}{\lg r}\cdot$$

Dadurch ist man imstande, aus jeder beliebigen Kurvenschar der einen Ebene die entsprechende der anderen leicht abzuleiten.

182) Ein Beispiel von praktischer Bedeutung. Das Kreisbüschel durch die Punkte $x = o$ und $x = +a$ auf der x-Achse der z-Ebene soll durch die Abbildung $Z = \lg z$ in die Z-Ebene übertragen werden. Dasselbe soll mit der orthogonalen Kreisschar geschehen.

Das Kreisbüschel hat die Gleichung

$$\vartheta_1 - \vartheta = c \quad \text{oder} \quad \arctan\frac{y}{x-a} - \arctan\frac{y}{x} = c.$$

Die linke Seite läßt sich schreiben

$$\arctan\left(\frac{\frac{y}{x-a} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x-a}\cdot\frac{y}{x}}\right) = \arctan\frac{a}{x^2 - ax + y^2} = \arctan\frac{a}{r^2 - \mathrm{ar}\cos\vartheta}$$

Die Gleichung

$$\arctan\frac{a}{r^2 - \mathrm{ar}\cos\vartheta} = c \quad \text{oder} \quad \frac{a}{r^2 - \mathrm{ar}\cos\vartheta} = \tan c$$

geht über in

$$1) \qquad \frac{a}{e^{2X} - ae^X \cos Y} = \tan c \quad \text{oder} \quad \arctan\frac{a}{e^{2X} - ae^X\cos Y} = c.$$

Die Kreisschar hat die Gleichung

$$\frac{r}{r_1} = e^c \quad \text{oder} \quad \frac{r}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} = e^c$$

oder endlich

$$\frac{r}{\sqrt{r^2 - 2\, ar \cos\vartheta + a^2}} = e^c.$$

Sie geht über in

$$2) \qquad \frac{e^X}{\sqrt{e^{2X} - 2\, a\, e^X \cos Y + a^2}} = e^c$$

oder durch Logarithmierung in

$$2^*) \qquad \lg e^X - \tfrac{1}{2} \lg \left[e^{2X} - 2\, ae^X \cos Y + a^2\right] = c.$$

Eine beliebig genaue Konstruktion der Kurven ergiebt sich folgendermaſsen. Man denke sich nach Fig. 85 die z-Ebene durch Polarkoordinaten, die Z-Ebene durch gewöhnliche Parallelenscharen in Quadrate eingeteilt. In der z-Ebene zeichne man die quadratische Einteilung durch Kreisbüschel und orthogonale Kreisschar mit den Grundpunkten $x = o$ und $x = + a$ der X-Achse mit anderer Farbe z. B. rot ein. Ist die ursprüngliche Teilung klein genug gewählt, so kann man die rote Zeichnung innerhalb jedes kleinen Quadrates der z-Ebene in das entsprechende Quadrat der Z-Ebene geometrisch ähnlich eintragen. In Fig. 134 ist das entstehende Gebilde dargestellt. Die Figur ist symmetrisch gegen AB, $A_1 B_1$ und CD nach oben und unten fortzusetzen, so daſs unendlich viele Parallelstreifen entstehen. Die durch E und F gehenden Niveaulinien haben Asymptoten, die aus Gründen potentieller Gleichwertigkeit die beiden Halbstreifen halbieren. Die nach links fortgesetzte Figur geht allmählich in eine wirkliche Quadratteilung durch gerade Linien über.

183) Deutungen der Figur. a) Man denke sich einen unbegrenzt langen Parallelstreifen von Metall, in den von links her Elektrizität einströme. Im Punkte P werde die gesamte Elektrizität abgeleitet. Die Figur stellt die Strom- und Niveaulinien des Problems und die entsprechende quadratische Einteilung dar. Die entsprechende Wärmeströmung ist mit denselben Worten darzustellen.

b) In einem flachen Kanale ströme von links her regelmäſsig Wasser heran, welches durch eine Pumpe bei P entfernt wird oder dort durch eine Bodenöffnung nach unten versinkt. Die Stromlinien und die Linien gleichen Geschwindigkeitspotentials sind dargestellt. Die Geschwindigkeiten sind umgekehrt proportional den Dimensionen der Quadrate. Nach rechts hin befindet sich die Flüssigkeit in angenähertem, in sehr groſser Entfernung in absolutem Ruhezustande.

c) Der Streifen stelle nach der noch zu besprechenden Forchheimerschen Grundwassertheorie eine Grundwasser führende Sandschicht in einem Thale dar, dessen Begrenzung durch die Geraden