UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

187) Die allgemeine isogonale Transformation

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

Visual Library

187) Die allgemeine isogonale Transformation.

Ganz allgemein handelt es sich um Abbildungen mittels der Funktionen komplexen Arguments

1) $$X + Yi = f(x + yi).$$

Zu jeder solchen gehört eine konjugierte Funktion

2) $$X - Yi = f_1(x - yi),$$

in der auch die komplexen Konstanten konjugiert zu nehmen sind.

Addition giebt

$$2X = f(x + yi) + f_1(x - yi),$$

Subtraktion

$$2Y = f(x + yi) - f_1(x - yi).$$

Demnach entsprechen den Parallelenscharen

$$X = a, \quad Y = b$$

die Kurvenscharen

$$\frac{f(x+yi) + f_1(x-yi)}{2} = a, \quad \frac{f(x+yi) - f_1(x-yi)}{2} = b.$$

Durch Multiplikation von 1) und 2) folgt noch

3) $$X^2 + Y^2 = f(x + yi) f_1(x - yi),$$

so dafs den koncentrischen Kreisen $R = c$ Kurven

$$\sqrt{f(x + yi) f_1(x - yi)} = c$$

entsprechen. Durch Division folgt hingegen

$$\frac{X + Yi}{X - Yi} = \frac{f(x+yi)}{f_1(x-yi)},$$

so dafs

$$\frac{1}{2i} \lg \frac{X + Y}{X - Yi} = \frac{1}{2i} \lg \frac{f(x+yi)}{f_1(x-yi)}$$

oder

$$\arctan \frac{Y}{X} = \frac{1}{2i} [\lg f(x + yi) - \lg f_1(x - yi)].$$

Überall hebt sich das Imaginäre weg. Den Kreisen $\lg R = c$ oder $R = e^c$ entsprechen die Kurven

$$\tfrac{1}{2} [\lg f(x + yi) + \lg f_1(x - yi)] = c,$$

den Geraden

$$\arctan \frac{Y}{X} = \vartheta$$

die Kurvenscharen

$$\frac{1}{2i} [\lg f(x + yi) - \lg f_1(x - yi)] = \vartheta.$$

Auch hierbei geht die quadratische Einteilung wieder in eine solche über. [Ein näheres Eingehen auf diesen Gegenstand würde Kenntnisse aus der höheren Analysis, besonders solche über Differentialquotienten und Integrale der Funktionen komplexen Arguments beanspruchen. In des Verfassers „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften" ist der Gegenstand möglichst elementar behandelt worden. Dort zeigt sich, dafs durch Transformation mittels der Funktionen komplexen Arguments jedes Strömungsnetz wieder in ein solches übergeht.]

Man kann aus solchen Beziehungen mancherlei Schlüsse ziehen. Liegen z. B. alle Einströmungs- bezw. Ableitungsstellen auf einer Geraden, so gehört offenbar die Gerade, gegen die Symmetrie stattfindet, zu den Stromlinien. Durch die Abbildung $Z = \frac{1}{z}$ geht die Gerade in einen Kreis über. Folglich: Liegen drei oder mehr Einströmungs- und auch Ausströmungspunkte auf einem Kreise (sind aber aufserdem keine vorhanden), so gehört der Kreis zu den Stromlinien. Der Symmetrie gegen die Gerade entspricht Reciprozität gegen den Kreis. Durch drei Punkte läfst sich stets ein Kreis legen, folglich gehört zu jedem Dreipunktproblem ein Kreis und gegen diesen findet Reciprozität statt, so dafs man sich nur um das Innere des Kreises zu kümmern braucht.

Liegen die Ausströmungspunkte symmetrisch gegen die Einströmungspunkte und entsprechen auch die Elektrizitätsmengen dieser Symmetrie, so gehört die Symmetrieachse zu den Niveaulinien. Liegen sie reciprok gegen jene, so gehört der Inversionskreis zu den Niveaulinien, und gegen diesen findet überhaupt Reciprozität statt. Vorausgesetzt wird dabei, dafs je zwei reciproke Punkte gleiche Mengen ein- bezw. ableiten.

188) Inversionsbeziehungen und elektrische Bilder in der Ebene. Die geometrischen und physikalischen Beziehungen sind bei den zweidimensionalen Problemen zum Teil andere, als bei den dreidimensionalen, wie sie in Kap. VII entwickelt wurden.

Jedes Bogenelement s geht nach Nr. 139 und Fig. 105 durch Inversion wieder über in

$$s_1 = s \cdot \frac{OB}{OA_1} = s \frac{OA}{OB_1}$$

oder

1) $$s_1 = s \frac{\varrho^2}{OA^2} = s \frac{OA_1^2}{\varrho^2}.$$

Denkt man sich über der Zeichnung Cylinder von unbegrenzter Höhe errichtet, so gilt diese Beziehung auch von gleich hohen Cylinderflächen, so dafs