Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

191) Ein wichtiges Mehrpunktproblem

189) **Aufgabe.** Das Problem des homogen belegten Cylinders abzubilden.

Auflösung. In der Schnittebene geht der Kreis in einen Kreis, die koncentrische Kreisschar in eine excentrische, das reguläre Strahlenbüschel der Kraftlinien in ein Kreisbüschel über, dessen Tangenten in den Büschelpunkten reguläre Strahlenbüschel sind. Die gleichen Bogenelemente des Kreises gehen nach 1) in solche über, die sich verhalten wie die Quadrate der Entfernungen OA (oder auch PA, wenn P der zugeordnete Punkt zu O im neuen Kreise ist). Die Dichtigkeiten der neuen Belegung sind also umgekehrt proportional diesen Entfernungsquadraten. Tritt an Stelle des Kreises eine Gerade, so ist das Gesetz leicht selbständig nachzuweisen

$$\left(p = \frac{1}{r} \cos \alpha = \frac{1}{r} \cdot \frac{e}{r} = \frac{e}{r^2}\right).$$

Die Wirkung des so belegten Cylinders (Kreises) nach aufsen läfst sich durch die der Geraden des inneren Büschelpunktes ersetzen, wobei die Quantitäten beider Belegungen gleich sind. Die Wirkung nach innen läfst sich ebenso durch die Belegung der Geraden des äufseren Büschelpunkts ersetzen. Hier lassen sich die früheren Betrachtungen über centrobarische Belegungen wiederholen.

Für den massiven Cylinder erhält man Dichtigkeiten, die umgekehrt proportional der 4^{ten} Potenz der Entfernung sind.

190) **Bemerkung.** Bei dem dreidimensionalen Probleme stimmten die Elektrizitätsmengen der Bilder nicht mit denen der Originalpunkte überein, infolge dessen ging dort ein Teil der Elektrizität nach dem Unendlichen ab, und das Innere der Kugel hatte Niveauflächen, die dem Äufseren nicht reciprok waren. Hier fällt dieser Umstand weg, jedes E_1 wird gleich E, also gehen jetzt durch die Abbildung die Niveaulinien eines Problems in die Niveaulinien des neuen Problems über. So tritt eine wesentliche Vereinfachung ein. Im Raume findet, wenn eine Kugel zu den Niveauflächen eines Problems gehört, im allgemeinen keine Reciprozität statt, wohl aber ist dies mit dem Kreise in der Ebene der Fall. Dieser Unterschied ist von wesentlicher Bedeutung. Weiteres über die Inversion in zweidimensionalen Problemen findet man in der „Theorie der isogonalen Verwandtschaften". Hier soll aus Raumgründen nicht näher darauf eingegangen werden.

191) Ein wichtiges Mehrpunktproblem.

Unter den Mehrpunktproblemen ist folgendes von Bedeutung. In den Punkten $y = \pm 1$ der Y-Achse ströme Elektrizität in gleichen

Mengen ein, im Nullpunkte des Koordinatensystems werde sie zur Hälfte abgeleitet, der Rest fliefst nach dem unendlichen Bereiche ab. Die Gleichungen werden

1) $\lg r_1 + \lg r_{-1} - \lg r_0 = c$ oder $\lg \frac{r_1 r_2}{r_0} = c$, oder $\frac{r_1 r_2}{r_0} = e^c$.

2) $$\vartheta_1 + \vartheta_{-1} - \vartheta_0 = c.$$

Die Konstruktion der Kurven geschieht durch die entsprechenden Kreisscharen und Strahlenbüschel.

Bei dem Einpunktproblem war dagegen $\lg R = c$, $\Theta = c$.

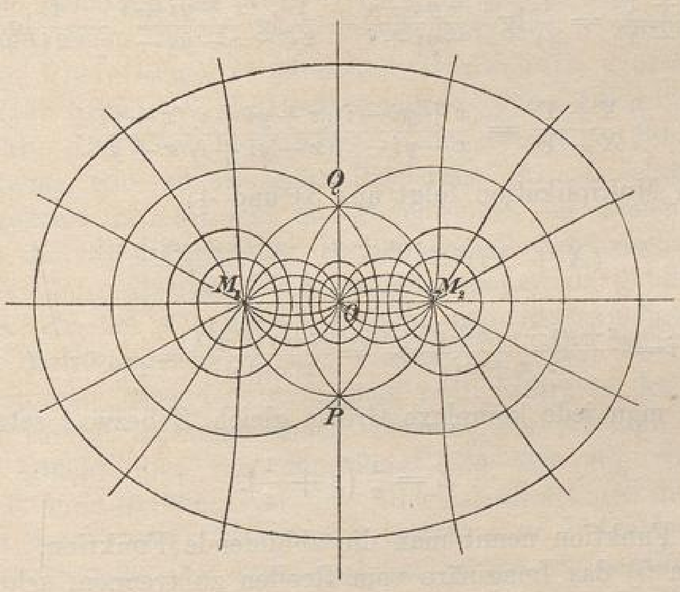
Zwischen den Polarkoordinaten der letzteren und denen der ersteren Ebenen finden also die Beziehungen

$$R = \frac{r_1 r_2}{r_0} \quad \text{und} \quad \Theta = \vartheta_1 + \vartheta_{-1} - \vartheta_0$$

statt.

In Fig. 135 ist die eine Ebene dargestellt. Es werde der Bequemlichkeit halber $R = \frac{r_1 r_2}{2 r_0}$ gesetzt, was nur eine Verkleinerung des Mafsstabes auf die Hälfte in der XY-Ebene bedeutet.

Fig. 135.



In gewöhnlichen Koordinaten lautet dann die Beziehung

1) $$X^2 + Y^2 = \frac{[x^2 + (y-1)^2]\,[x^2 + (y+1)^2]}{4\,(x^2 + y^2)}$$

2*) $$\arctan\frac{Y}{X} = \arctan\frac{y-1}{x} + \arctan\frac{y+1}{x} - \arctan\frac{y}{x}$$

$$= \arctan\frac{\frac{y-1}{x}+\frac{y+1}{x}}{1-\frac{y-1}{x}\cdot\frac{y+1}{x}} - \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{2xy}{x^2-y^2+1} - \arctan\frac{y}{x}$$

$$= \arctan\frac{\frac{2xy}{x^2-y^2+1}-\frac{y}{x}}{1+\frac{2xy}{x^2-y^2+1}\cdot\frac{y}{x}} = \arctan\frac{2x^2y-y(x^2-y^2+1)}{x(x^2-y^2+1)+2xy^2}$$

oder

2) $$\frac{Y}{X} = \frac{y}{x}\cdot\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}.$$

Will man erfahren, was den Kurven $X=a$, $Y=b$ entspricht, so hat man Y und X aus den beiden Gleichungen zu berechnen, was keine Schwierigkeiten macht.

Statt des gewöhnlichen Weges sei auf den Weg der Zerlegung in Produkte komplexer Faktoren aufmerksam gemacht. Man kann statt 1) schreiben

3) $$(X+Yi)(X-Yi) = \frac{(x+yi-i)(x-yi+i)(x+yi+i)(x-yi-i)}{4(x+yi)(x-yi)}.$$

Statt 2*) kann man schreiben

$$\frac{1}{2i}\lg\frac{X+Yi}{X-Yi} = \frac{1}{2i}\lg\frac{x+yi-i}{x-yi+i} + \frac{1}{2i}\lg\frac{x+yi+i}{x-yi-i} - \frac{1}{2i}\lg\frac{x+yi}{x-yi}$$

oder

4) $$\frac{X+Yi}{X-Yi} = \frac{(x+yi-i)(x+yi+i)(x-yi)}{(x-yi-i)(x-yi+i)(x+yi)}.$$

Durch Multiplikation folgt aus 3) und 4)

$$(X+Yi)^2 = \frac{(x+yi-i)^2(x+yi+i)^2}{4(x+yi)^2}$$

oder

5) $$X+Yi = \frac{(x+yi-i)(x+yi+i)}{2(x+yi)} = \frac{(x+yi)^2+1}{2(x+yi)} = \frac{1}{2}\left[(x+yi)+\frac{1}{x+yi}\right],$$

oder wenn man jede komplexe Gröfse gleich Z bezw. z setzt,

6) $$Z = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right).$$

Diese Funktion nennt man die abbildende Funktion.

Um in 5) das Imaginäre vom Reellen zu trennen, schreibe man

$$X+Yi = \frac{1}{2}\left[x+yi+\frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)}\right] = \frac{1}{2}\left[x+yi+\frac{x-yi}{x^2+y^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x(x^2+y^2)+x}{x^2+y^2}+\frac{y(x^2+y^2)-yi}{x^2+y^2}\right].$$

Daraus folgt

7) $$X = \frac{x}{2}\,\frac{(x^2+y^2)+1}{(x^2+y^2)} = \frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\varphi,$$

8) $$Y = \frac{y}{2}\,\frac{(x^2+y^2)-1}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi.$$

So ist die Bestimmung von X und Y ohne umständliche Rechnungen erfolgt und das Resultat in die einfachste Gestalt gebracht. Die Kurven, die den Geraden $X=a$, $X=b$ der X-Ebene entsprechen, sind in der Zeichnung (Fig. 136) dargestellt. Für $Y=0$ erhält man die Kurve

$$\frac{y}{2}\cdot\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2}=0 \quad \text{oder} \quad x^2+y^2-1=0,$$

d. h. einen Kreis mit dem Radius 1, gegen den Reciprozität stattfindet. (Die Figur findet sich auch in der Dissertation des Dr. Hans Meyer, Zürich 1879.)

192) Deutungen der Figur. a) Man denke sich die homogene Strömung eines breiten Stromes von links nach rechts gehend. In der Mitte des gezeichneten Kreises werde durch ein Schaufelrad oder durch Dampfkraft eine kräftige Gegenströmung erzeugt, die kontinuierlich Wasser nach links treibt und von rechts her ansaugt. Diese Strömung denke man sich in der ganzen Tiefe wirkend. Ein Stromfaden geht von der Mitte O nach A, spaltet sich dort in einen über B und einen über D nach C und dann nach O zurückgehenden Faden von kreisförmiger Gestalt. Innerhalb dieses Kreises spielen sich lokale Wirbelbewegungen*) von der gezeichneten Gestalt ab. Der Kreis bezw. Kreiscylinder zwingt den Strom, um ihn herumzugehen, wie um ein festes Hindernis. Alle Geschwindigkeiten sind umgekehrt proportional den Dimensionen der kleinen Quadrate, die durch die Stromlinien und die orthogonale Kurvenschar (Niveaulinien oder Linien gleichen Geschwindigkeitspotentials) gebildet werden. Daher herrscht bei A und C Aufhebung der Geschwindigkeiten.

(Ein Vorlesungsversuch mit Wasser liefse sich wohl für kurze Zeit arrangieren, besonders wenn man nach Eintreten des stationären Zustandes im Wirbelraume andere Färbung hervorbringt. Selbstverständlich glückt dies nur angenähert, da hier von einer idealen Flüssigkeit ohne Reibung und ohne Molekulardrehungen die Rede ist.)

Statt der Flüssigkeitsströmung könnte man in ein breites Band, in dem Elektrizität von links nach rechts strömt, unmittelbar links von O Elektrizität einströmen, unmittelbar rechts von O abströmen lassen. Die Stromlinien sind dieselben. Auch eine entsprechende Wärmeströmung kann man sich denken.

*) Nicht im Helmholtzschen, sondern im vulgären Sinne.