Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

192) Deutungen der Figur

Daraus folgt

7) $$X = \frac{x}{2} \frac{(x^2+y^2)+1}{(x^2+y^2)} = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \cos\varphi,$$

8) $$Y = \frac{y}{2} \frac{(x^2+y^2)-1}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right) \sin\varphi.$$

So ist die Bestimmung von X und Y ohne umständliche Rechnungen erfolgt und das Resultat in die einfachste Gestalt gebracht. Die Kurven, die den Geraden $X = a$, $X = b$ der X-Ebene entsprechen, sind in der Zeichnung (Fig. 136) dargestellt. Für $Y = 0$ erhält man die Kurve

$$\frac{y}{2} \cdot \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2} = 0 \quad \text{oder} \quad x^2+y^2-1 = 0,$$

d. h. einen Kreis mit dem Radius 1, gegen den Reciprozität stattfindet. (Die Figur findet sich auch in der Dissertation des Dr. Hans Meyer, Zürich 1879.)

192) Deutungen der Figur. a) Man denke sich die homogene Strömung eines breiten Stromes von links nach rechts gehend. In der Mitte des gezeichneten Kreises werde durch ein Schaufelrad oder durch Dampfkraft eine kräftige Gegenströmung erzeugt, die kontinuierlich Wasser nach links treibt und von rechts her ansaugt. Diese Strömung denke man sich in der ganzen Tiefe wirkend. Ein Stromfaden geht von der Mitte O nach A, spaltet sich dort in einen über B und einen über D nach C und dann nach O zurückgehenden Faden von kreisförmiger Gestalt. Innerhalb dieses Kreises spielen sich lokale Wirbelbewegungen*) von der gezeichneten Gestalt ab. Der Kreis bezw. Kreiscylinder zwingt den Strom, um ihn herumzugehen, wie um ein festes Hindernis. Alle Geschwindigkeiten sind umgekehrt proportional den Dimensionen der kleinen Quadrate, die durch die Stromlinien und die orthogonale Kurvenschar (Niveaulinien oder Linien gleichen Geschwindigkeitspotentials) gebildet werden. Daher herrscht bei A und C Aufhebung der Geschwindigkeiten.

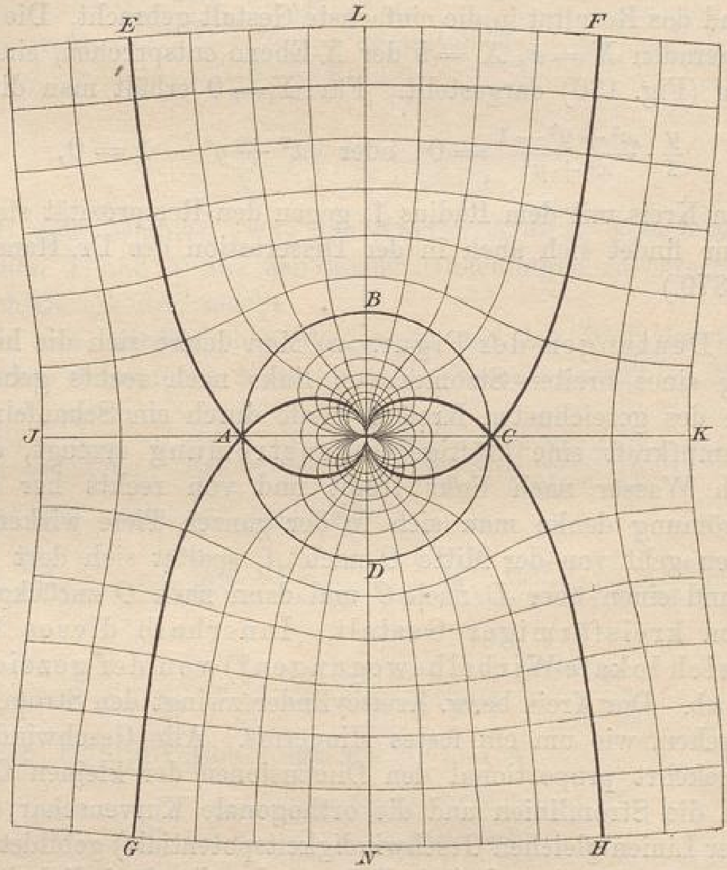
(Ein Vorlesungsversuch mit Wasser liefse sich wohl für kurze Zeit arrangieren, besonders wenn man nach Eintreten des stationären Zustandes im Wirbelraume andere Färbung hervorbringt. Selbstverständlich glückt dies nur angenähert, da hier von einer idealen Flüssigkeit ohne Reibung und ohne Molekulardrehungen die Rede ist.)

Statt der Flüssigkeitsströmung könnte man in ein breites Band, in dem Elektrizität von links nach rechts strömt, unmittelbar links von O Elektrizität einströmen, unmittelbar rechts von O abströmen lassen. Die Stromlinien sind dieselben. Auch eine entsprechende Wärmeströmung kann man sich denken.

*) Nicht im Helmholtzschen, sondern im vulgären Sinne.

Statt dessen könnte man in das homogene erdmagnetische Feld einen kleinen Magnet stellen, dessen Lage der labilen Gleichgewichtslage des Kompaſs entspricht. Dann gilt aber die Zeichnung nur angenähert, denn das Problem wird dreidimensional.

Fig. 136.



Später wird gezeigt werden, daſs man sich rechts und links von O einen auf- und einen niedergehenden elektrischen Strom in Drähten denken kann, die normal zur Zeichnungsebene stehen. Die Kraftlinien der elektromagnetischen Wirkungen geben mit denen des homogenen, erdmagnetischen Feldes die vorliegende Zeichnung.

Man denke sich um den Mittelpunkt O einen gröſseren Kreis, als den vorliegenden, geschlagen. Er soll einen diamagnetischen Cylinder bedeuten, der in ein homogenes Feld gestellt ist. Dieser zwingt die Kraftlinien des letzteren zum Abweichen von der ursprünglichen Richtung, so daſs eine geringere Anzahl horizontal durch ihn geht. Die Richtung innerhalb des Körpers ist horizontal in die

Zeichnung einzutragen. (Die entsprechende Figur befindet sich an späterer Stelle und auch in den Lehrbüchern.) Ein diamagnetischer Cylinder verhält sich also so, als ob in seinem Centrum ein kleiner Magnet in labiler Gleichgewichtslage angebracht wäre. Das Verhältnis der Anzahl von Kraftlinien, die jetzt den senkrechten Durchmesser des Kreises passieren, zu der Anzahl, die vorher durch dieselbe Linie ging, giebt den Faktor μ der magnetischen Permeabilität, der hier kleiner als 1 ist. Die Lösung des magnetischen Problems ist nur eine angenäherte, weil die Aufgabe eigentlich eine dreidimensionale ist.

b) Das Vertauschungsproblem. Man denke sich jetzt die Strömung in der Zeichnung vertikal nach unten gerichtet, und bei O eine gleichgerichtete stärkere Strömung durch Schaufelrad oder mittels eines Cylinders hervorgebracht. Der Cylinder saugt dann einen Teil der Hauptströmung in sich ein, stöfst aber nach unten hin so viel aus, dafs die Kraftlinien sich wieder Raum schaffen. Die Grenzlinien der Einsaugung gehen durch A und C, erhalten dort einen rechtwinkligen Knick und gehen im Bogen nach O. Die ausgestofsene Strömung ist durch symmetrische Linien, die ebenfalls nach A und C gehen, begrenzt. Der lokale Wirbel findet innerhalb der beiden Flächen statt, die durch die von O nach A und C gehenden Bogen begrenzt sind.

Die entsprechenden Deutungen über stationäre elektrische oder Wärmeströmung, über Kraftlinien magnetischer oder elektromagnetischer Art im homogenen Felde bei stabiler Gleichgewichtslage des Magneten lege sich der Leser selbst zurecht. Ein gröfserer um O geschlagener Kreis wird von den Kraftlinien der Hauptströmung so getroffen, dafs man das Bild der Einwirkung eines paramagnetischen Körpers erhält, der eine gröfsere Anzahl von Kraftlinien zum Durchgang zwingt, als dem entsprechenden leeren Raume zukommen würden. In ihm selbst sind die Linien vertikale Gerade. (Fall $\mu > 1$.)

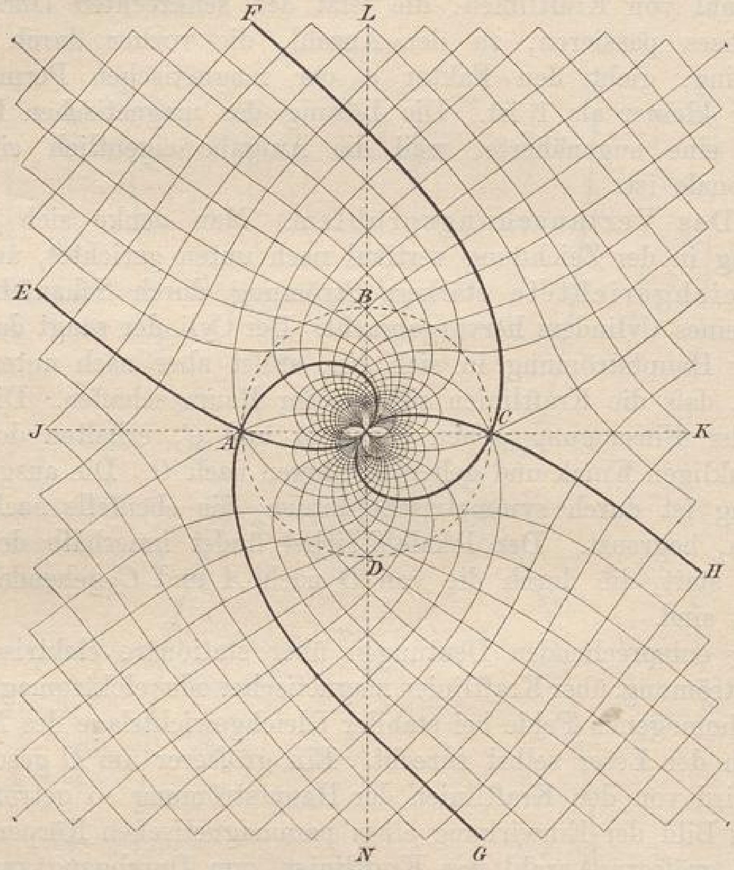
c) Das Diagonalproblem. Fig. 137 ist dadurch entstanden, dafs in das Quadratnetz der vorigen die Diagonalen eingetragen sind, die wiederum ein Quadratnetz geben.

Die neuen Deutungen ergeben sich dadurch, dafs man eine in der Zeichnung unter 45^0 geneigte homogene Hauptströmung bei O durch eine Lokalströmung stört, die senkrecht dagegen gerichtet ist. Die Grenzlinien der Ansaugung und Ausstofsung sind in der Zeichnung markiert, ebenso die Kurven, welche die lokalen Wirbel einschliefsen. Die übrigen Deutungen liegen auf der Hand.

Das Vertauschungsproblem giebt hier nichts Neues, sondern eine symmetrische Zeichnung, was im allgemeinen nicht der Fall zu sein braucht.

Beide Zeichnungen entsprechen den Tafeln XVI und XVII bei Maxwell-Weinstein, wo die leer gelassenen Cylinder das Verständnis erschweren.

Fig. 137.

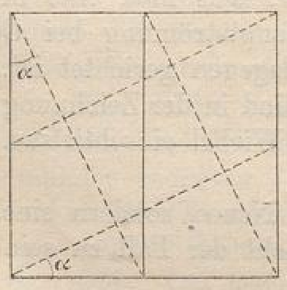


d) Andere Diagonalprobleme. In ähnlicher Weise giebt jede isothermische Quadratteilung der Ebene zu einem Strömungsproblem, einem Vertauschungsproblem und einem Diagonalproblem Anlafs. Man kann aber auch andere Diagonalprobleme ableiten, indem man z. B. in das ursprüngliche Quadratnetz orthogonale Rechtecksdiagonalen z. B. für

$$\tan \alpha = \tan \alpha_1 = \tfrac{1}{2}$$

einzeichnet, wie es Fig. 138 andeutet.

Fig. 138.



193) Die selbständige Konstruktion der Kurven in Fig. 136 kann folgendermafsen