Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

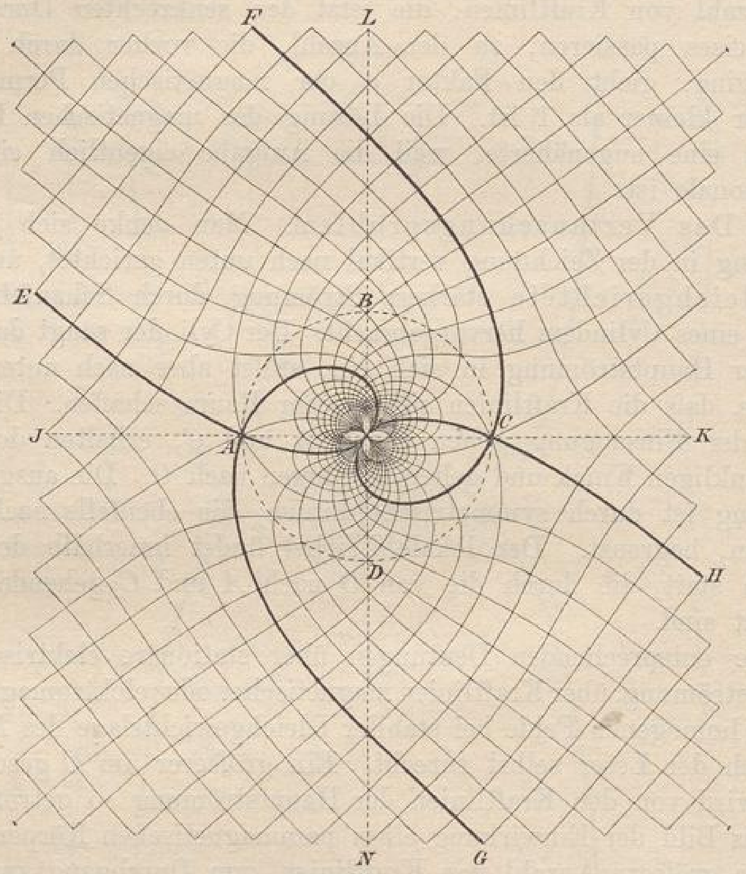
Leipzig, 1898

193) Konstruktion der Kurven des Problems

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

Beide Zeichnungen entsprechen den Tafeln XVI und XVII bei Maxwell-Weinstein, wo die leer gelassenen Cylinder das Verständnis erschweren.

Fig. 137.

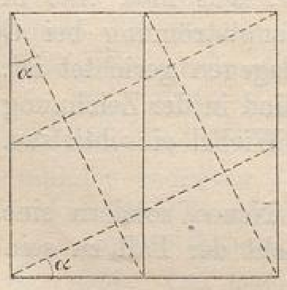


d) Andere Diagonalprobleme. In ähnlicher Weise giebt jede isothermische Quadratteilung der Ebene zu einem Strömungsproblem, einem Vertauschungsproblem und einem Diagonalproblem Anlafs. Man kann aber auch andere Diagonalprobleme ableiten, indem man z. B. in das ursprüngliche Quadratnetz orthogonale Rechtecksdiagonalen z. B. für

$$\tan \alpha = \tan \alpha_1 = \tfrac{1}{2}$$

einzeichnet, wie es Fig. 138 andeutet.

Fig. 138.

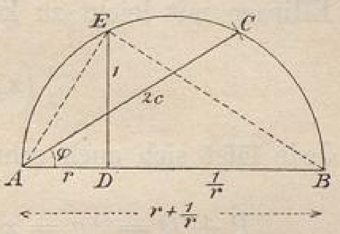


193) Die selbständige Konstruktion der Kurven in Fig. 136 kann folgendermafsen

erfolgen. Nach Festsetzung der Einheit DE bildet man zu einer beliebigen Länge r den reciproken Wert $\frac{1}{r}$ und trägt $2c$ als Sehne AC in einen Halbkreis vom Durchmesser $AB = r + \frac{1}{r}$ ein. Dies giebt einen Winkel $BAC = \varphi$, für den

$$\cos\varphi = \frac{2c}{r + \frac{1}{r}}$$

Fig. 139.



ist, was der Gleichung 7) entspricht. So erhält man für jedes r und c das zugehörige φ, und damit sind beliebig viele Punkte einer Kurve von der Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi = c$$

konstruiert. Ebenso verfährt man mit $r - \frac{1}{r}$, was auf Kurven von der Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\cos\varphi = c$$

führt.

194) Übergang zu den elliptischen Koordinaten. Der Einheitskreis der z-Ebene entspricht bei vorliegender Abbildung dem horizontalen (doppelt zu denkenden) Durchmesser des Einheitskreises der Z-Ebene. So liegt es nahe zu untersuchen, welche Kurven der Z-Ebene den Polarkoordinaten der z-Ebene überhaupt entsprechen.

Man gehe aus von den aus 7) und 8) folgenden Beziehungen

$$\frac{X}{\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)} = \cos\varphi, \quad \frac{Y}{\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)} = \sin\varphi.$$

Um φ zu entfernen, quadriere man beide Seiten jeder Gleichung und bilde durch Addition eine neue Gleichung. Bei dieser steht rechts $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi$ oder 1, so dafs man erhält

$$9) \qquad \frac{X^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\right]^2} + \frac{Y^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\right]^2} = 1.$$

Dies ist aber für gegebenes r die Gleichung einer Ellipse mit den Halbachsen

$$a = \tfrac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \quad \text{und} \quad b = \tfrac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right).$$

Da

$$a^2 - b^2 = \tfrac{1}{4}\left(r + \frac{1}{r}\right)^2 - \tfrac{1}{4}\left(r - \frac{1}{r}\right)^2 = 1$$