Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

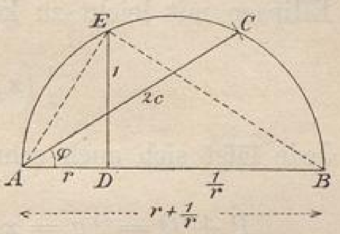
Leipzig, 1898

194) Übergang zu den elliptischen Koordinaten

erfolgen. Nach Festsetzung der Einheit DE bildet man zu einer beliebigen Länge r den reciproken Wert $\frac{1}{r}$ und trägt $2c$ als Sehne AC in einen Halbkreis vom Durchmesser $AB = r + \frac{1}{r}$ ein. Dies giebt einen Winkel $BAC = \varphi$, für den

$$\cos\varphi = \frac{2c}{r + \frac{1}{r}}$$

Fig. 139.



ist, was der Gleichung 7) entspricht. So erhält man für jedes r und c das zugehörige φ, und damit sind beliebig viele Punkte einer Kurve von der Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi = c$$

konstruiert. Ebenso verfährt man mit $r - \frac{1}{r}$, was auf Kurven von der Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\cos\varphi = c$$

führt.

194) Übergang zu den elliptischen Koordinaten. Der Einheitskreis der z-Ebene entspricht bei vorliegender Abbildung dem horizontalen (doppelt zu denkenden) Durchmesser des Einheitskreises der Z-Ebene. So liegt es nahe zu untersuchen, welche Kurven der Z-Ebene den Polarkoordinaten der z-Ebene überhaupt entsprechen.

Man gehe aus von den aus 7) und 8) folgenden Beziehungen

$$\frac{X}{\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)} = \cos\varphi, \quad \frac{Y}{\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)} = \sin\varphi.$$

Um φ zu entfernen, quadriere man beide Seiten jeder Gleichung und bilde durch Addition eine neue Gleichung. Bei dieser steht rechts $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi$ oder 1, so daſs man erhält

$$9)\qquad \frac{X^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\right]^2} + \frac{Y^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\right]^2} = 1.$$

Dies ist aber für gegebenes r die Gleichung einer Ellipse mit den Halbachsen

$$a = \tfrac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \quad \text{und} \quad b = \tfrac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right).$$

Da

$$a^2 - b^2 = \tfrac{1}{4}\left(r + \frac{1}{r}\right)^2 - \tfrac{1}{4}\left(r - \frac{1}{r}\right)^2 = 1$$

ist, so liegen die Brennpunkte an den Stellen ± 1 der X-Achse Also:

Der koncentrischen Kreisschar $r = \varkappa$ um den Nullpunkt der z-Ebene entspricht in der andern Ebene eine Schar konfokaler Ellipsen mit leicht zu konstruierenden Halbachsen

$$\tfrac{1}{2}\left(\varkappa + \frac{1}{\varkappa}\right) \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}\left(\varkappa - \frac{1}{\varkappa}\right).$$

Jede läſst sich auch schreiben nach der Vektorengleichung

$$P + Q = 2a = \varkappa + \frac{1}{\varkappa} \quad \text{oder} \quad \frac{P+Q}{2} = \tfrac{1}{2}\left(\varkappa + \frac{1}{\varkappa}\right) = a.$$

Um aus 7) und 8) die Gröſse r zu eliminieren, gehe man aus von den Formen

$$\frac{X}{\cos\varphi} = \tfrac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right), \quad \frac{Y}{\sin\varphi} = \tfrac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right),$$

quadriere beiderseits und bilde eine neue Gleichung durch Subtraktion. Rechts steht dann

$$\tfrac{1}{4}\left(r + \frac{1}{r}\right)^2 + \tfrac{1}{4}\left(r - \frac{1}{r}\right)^2 = 1,$$

so daſs die Gleichung lautet

$$10) \qquad \frac{X^2}{\cos^2\varphi} - \frac{Y^2}{\sin^2\varphi} = 1.$$

Der Geraden $\varphi = \gamma$ durch den Nullpunkt der z-Ebene entspricht also in der Z-Ebene eine Hyperbel. Ihre Halbachsen a und b geben die Beziehung

$$a^2 + b^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1,$$

demnach liegen die Brennpunkte an den Stellen ± 1 der X-Achse, und γ ist zugleich die Neigung der Asymptote. Dem Strahlenbüschel $\varphi = \gamma$ durch den Nullpunkt der z-Ebene entspricht also eine Schar konfokaler Hyperbeln. Jede davon läſst sich nach der Vektorengleichung schreiben in der Form

$$P - Q = 2a = 2\cos\gamma \quad \text{oder} \quad \frac{P-Q}{2} = \cos\gamma.$$

Aus

$$\frac{P+Q}{2} = \tfrac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \quad \text{und} \quad \frac{P-Q}{2} = \cos\varphi$$

folgt

$$r = \frac{P+Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{P+Q}{2}\right)^2 + 1} \quad \text{und} \quad \varphi = \arccos\frac{P-Q}{2}.$$

Jeder Kurve $f(r, \varphi) = o$ der z-Ebene entspricht also eine Kurve

$$f\left[\left(\frac{P+Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{P+Q}{2}\right)^2 + 1}\right),\ \arccos\frac{P-Q}{2}\right] = o$$

der Z-Ebene, jeder Kurve

$$f\left[\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right),\ \cos\varphi\right] = o$$

der z-Ebene eine Kurve

$$f\left[\frac{P+Q}{2},\ \frac{P-Q}{2}\right] = o$$

der Z-Ebene. Setzt man die Halbachse $\frac{P+Q}{2}$ gleich einem Parameter a, die der Hyperbel gleich einem Parameter α, so würde es sich handeln um $f(a, \alpha) = o$.

Fig. 140.

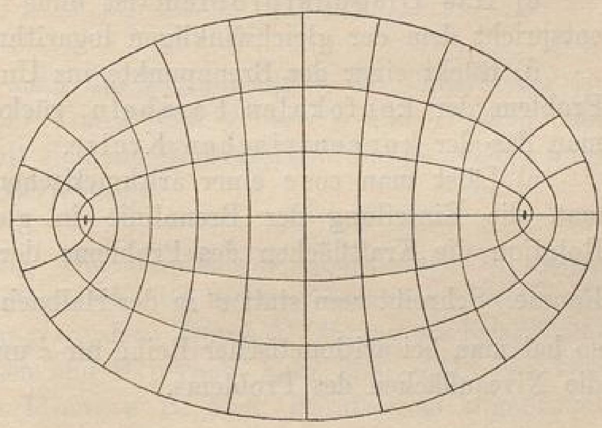


Fig. 140 stellt die Quadratteilung durch konfokale Ellipsen und Hyperbeln dar. Die Asymptoten der Hyperbeln folgen unter gleichen Winkeln aufeinander, genau so wie die Geraden der z-Ebene. Quadratteilung entsteht, wenn in

$$\frac{P+Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{P+Q}{2}\right)^2 + 1} = e^c \quad \text{oder} \quad \frac{P+Q}{2} = \frac{e^c + e^{-c}}{2} \text{ (Halbachse } a\text{)},$$

ebenso in

$$\arccos\frac{P-Q}{2} = c$$

oder

$$\frac{P-Q}{2} = \cos c \text{ (Halbachse bezw. Asymptotenneigung } c\text{)}$$

der Parameter c einer arithmetischen Reihe folgt, z. B der Reihe

$$0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \ldots$$

195) Deutungen der Figur. a) In die Ebene strömt längs der Brennlinie F_1F_2 Elektrizität ein und wird nach dem Unendlichen abgeleitet. Dasselbe gilt von der Wärmeströmung. Die Hyperbeln sind