Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

195) Deutungen der Figur

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

Jeder Kurve $f(r, \varphi) = o$ der z-Ebene entspricht also eine Kurve

$$f\left[\left(\frac{P+Q}{2}+\sqrt{\left(\frac{P+Q}{2}\right)^2+1}\right),\ \arccos\frac{P-Q}{2}\right]=o$$

der Z-Ebene, jeder Kurve

$$f\left[\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right),\ \cos\varphi\right]=o$$

der z-Ebene eine Kurve

$$f\left[\frac{P+Q}{2},\ \frac{P-Q}{2}\right]=o$$

der Z-Ebene. Setzt man die Halbachse $\frac{P+Q}{2}$ gleich einem Parameter a, die der Hyperbel gleich einem Parameter α, so würde es sich handeln um $f(a, \alpha) = o$.

Fig. 140.

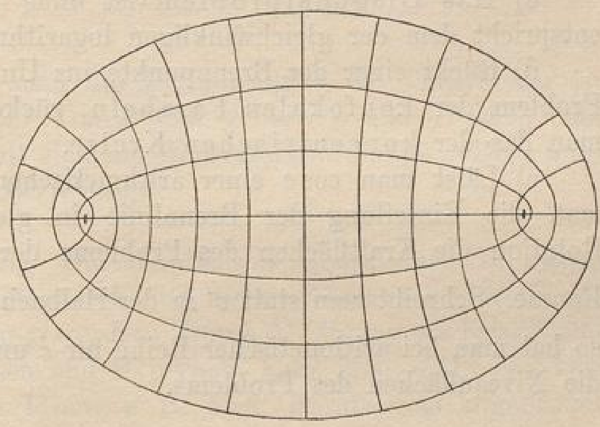

Fig. 140 stellt die Quadratteilung durch konfokale Ellipsen und Hyperbeln dar. Die Asymptoten der Hyperbeln folgen unter gleichen Winkeln aufeinander, genau so wie die Geraden der z-Ebene. Quadratteilung entsteht, wenn in

$$\frac{P+Q}{2}+\sqrt{\left(\frac{P+Q}{2}\right)^2+1}=e^c \quad \text{oder} \quad \frac{P+Q}{2}=\frac{e^c+e^{-c}}{2} \ \text{(Halbachse } a\text{)},$$

ebenso in

$$\arccos\frac{P-Q}{2}=c$$

oder

$$\frac{P-Q}{2}=\cos c \ \text{(Halbachse bezw. Asymptotenneigung } c\text{)}$$

der Parameter c einer arithmetischen Reihe folgt, z. B der Reihe

$$0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \ldots$$

195) Deutungen der Figur. a) In die Ebene strömt längs der Brennlinie $F_1 F_2$ Elektrizität ein und wird nach dem Unendlichen abgeleitet. Dasselbe gilt von der Wärmeströmung. Die Hyperbeln sind

Strom-, die Ellipsen Niveaulinien. In den hyperbolischen Kanälen strömt gleich viel Fluidum. Oder aus einem flachen See von konstanter Tiefe wird längs der Linie F_1F_2 Wasser entfernt. Oder mit Hilfe des Sickerschlitzes F_1F_2 wird aus homogener Grundwasserschicht Wasser ausgepumpt. Oder FF_1 stellt eine unbegrenzte Ebene dar, die so mit Masse belegt ist, dafs auf die Abschnitte der Brennlinie gleich viel Masse kommt. Dabei handelt es sich um die Newtonschen Kraft- und Niveaulinien. Die Belegung dieser Ebene bezw. eines der Cylinder entspricht der elektrischen Verteilung bei Ladung und Influenz.

b) Vertauschungsproblem. Man denke sich aus der X-Achse die Brennlinie F_1F_2 entfernt. In dem stehenbleibenden Teile der positiven Achse lasse man Elektrizität ein, in dem der negativen ausströmen. Die Ellipsen werden Strom-, die Hyperbeln Niveaulinien. Ebenso ist es mit den anderen Deutungen.

c) Das Diagonalproblem ist ohne besondere Bedeutung, es entspricht dem der gleichwinkligen logarithmischen Spiralen.

d) Rückt einer der Brennpunkte ins Unendliche, so hat man das Problem der konfokalen Parabeln, rücken beide nach O, so hat man das der koncentrischen Kreise.

e) Läfst man $\cos c$ einer arithmetischen Reihe folgen, so erhält man die Einteilung der Brennlinie in gleiche Stücke und durch Rotation die Kraftflächen des Problems der homogenen Geraden im Raume. Schreibt man statt e^c in der Halbachsenformel der Ellipsen $\frac{1}{c}$, so hat man bei arithmetischer Reihe für c und nach erfolgter Rotation die Niveauflächen des Problems.

196) Zusammenstellung der gegenseitigen Beziehungen beider Ebenen.

In beiden Ebenen entsprechen einander folgende Kurvenscharen:

Z-Ebene.	z-Ebene.
1) $f[X,\ Y] = 0$	1*) $f\left[\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi,\ \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi\right]$.
2) $f[a,\ \alpha] = 0$	2*) $f\left[\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right),\ \cos\varphi\right] = 0$.
3) $f[R,\ \Phi] = 0$	3*) $f\left[\frac{pq}{2r},\ \varphi + \chi - \vartheta\right] = 0$.
4) $f[(a + \sqrt{a^2+1}),\ \arccos\alpha] = 0$	4*) $f[r,\ \varphi] = 0$.
5) $f[(a + \sqrt{a^2-1})\sqrt{1-\alpha^2},\ \alpha(a + \sqrt{a^2-1})] = 0$	5*) $f(xy) = 0$.
6) $f\left[\frac{P}{Q},\ (\Phi - X)\right] = 0$	6*) $f\left[\left(\frac{p}{q}\right)^2,\ 2(\varphi - \chi)\right] = 0$.