Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

196) Tabelle der gegenseitigen Beziehungen

Strom-, die Ellipsen Niveaulinien. In den hyperbolischen Kanälen strömt gleich viel Fluidum. Oder aus einem flachen See von konstanter Tiefe wird längs der Linie F_1F_2 Wasser entfernt. Oder mit Hilfe des Sickerschlitzes F_1F_2 wird aus homogener Grundwasserschicht Wasser ausgepumpt. Oder FF_1 stellt eine unbegrenzte Ebene dar, die so mit Masse belegt ist, daſs auf die Abschnitte der Brennlinie gleich viel Masse kommt. Dabei handelt es sich um die Newtonschen Kraft- und Niveaulinien. Die Belegung dieser Ebene bezw. eines der Cylinder entspricht der elektrischen Verteilung bei Ladung und Influenz.

b) Vertauschungsproblem. Man denke sich aus der X-Achse die Brennlinie F_1F_2 entfernt. In dem stehenbleibenden Teile der positiven Achse lasse man Elektrizität ein, in dem der negativen ausströmen. Die Ellipsen werden Strom-, die Hyperbeln Niveaulinien. Ebenso ist es mit den anderen Deutungen.

c) Das Diagonalproblem ist ohne besondere Bedeutung, es entspricht dem der gleichwinkligen logarithmischen Spiralen.

d) Rückt einer der Brennpunkte ins Unendliche, so hat man das Problem der konfokalen Parabeln, rücken beide nach O, so hat man das der koncentrischen Kreise.

e) Läſst man $\cos c$ einer arithmetischen Reihe folgen, so erhält man die Einteilung der Brennlinie in gleiche Stücke und durch Rotation die Kraftflächen des Problems der homogenen Geraden im Raume. Schreibt man statt e^c in der Halbachsenformel der Ellipsen $\frac{1}{c}$, so hat man bei arithmetischer Reihe für c und nach erfolgter Rotation die Niveauflächen des Problems.

196) Zusammenstellung der gegenseitigen Beziehungen beider Ebenen.

In beiden Ebenen entsprechen einander folgende Kurvenscharen:

Z-Ebene.	z-Ebene.
1) $f[X,\ Y] = 0$	1*) $f\left[\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi,\ \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi\right]$.
2) $f[a,\ \alpha] = 0$	2*) $f\left[\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right),\ \cos\varphi\right] = 0$.
3) $f[R,\ \Phi] = 0$	3*) $f\left[\frac{pq}{2r},\ \varphi + \chi - \vartheta\right] = 0$.
4) $f[(a + \sqrt{a^2+1}),\ \operatorname{arc}\cos\alpha] = 0$	4*) $f[r,\ \varphi] = 0$.
5) $f[(a + \sqrt{a^2-1})\sqrt{1-\alpha^2},\ \alpha(a + \sqrt{a^2-1})] = 0$	5*) $f(xy) = 0$.
6) $f\left[\frac{P}{Q},\ (\Phi - X)\right] = 0$	6*) $f\left[\left(\frac{p}{q}\right)^2,\ 2(\varphi - \chi)\right] = 0$.

Hier bedeuten a und α die Ausdrücke $\frac{P+Q}{2}$ und $\frac{P-Q}{2}$. In 3*) gehen p, q und r von den Punkten $+i$, $-i$ und 0 aus, die Relation 5) ergiebt sich durch Berechnung von x und y aus den Gleichungen

$$r + \frac{1}{r} = 2a \quad \text{und} \quad \cos\varphi = \alpha$$

oder aus

$$\sqrt{x^2+y^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2a \quad \text{und} \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \alpha.$$

Führt man statt a und α die Koordinaten X und Y ein, so entsteht die kompliziertere Formel

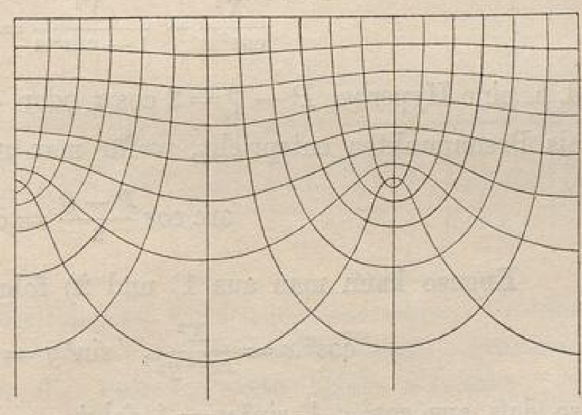
$$x = X + \sqrt{\frac{\sqrt{(X^2-Y^2-1)^2-4X^2Y^2}+(X^2-Y^2-1)}{2}}$$

$$y = Y + \sqrt{\frac{\sqrt{(X^2-Y^2-1)^2-4X^2Y^2}-(X^2-Y^2-1)}{2}}.$$

Über 6) vergleiche man die Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften. Die P und Q bezw. p und q gehen dabei von -1 aus. Es handelt sich um Bicircularkoordinaten. Dort findet man noch anderweitige Beziehungen.

197) Bemerkungen. Die elliptischen Koordinaten für Ebene und Raum sind für die Mechanik und die mathematische Physik von hervorragender Bedeutung geworden. Durch Abbildung des betreffenden Quadratnetzes der Ellipsen und Hyperbeln kann man zahlreiche komplizierte Linearprobleme lösen, z. B. über sternförmig angeordnete Sickerschlitze und dgl. Man versuche z. B. die Abbildungen $Z = \sqrt{z}$, $Z = \sqrt[n]{z}$ darauf anzuwenden.

Fig. 141.



So kann man z. B. durch $Z = \sqrt{z}$ das Problem der Geraden F_1F_2 in das Problem zweier Geraden auf derselben Linie verwandeln, wobei eine Normale als Symmetrieachse auftritt. Man kann jetzt die Betrachtung auf die Halbebenen beschränken und diese durch die Abbildung $Z = z^2$ in eine aufgeschnittene Vollebene ver-