Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

197) Bemerkungen

Hier bedeuten a und α die Ausdrücke $\frac{P+Q}{2}$ und $\frac{P-Q}{2}$. In 3*) gehen p, q und r von den Punkten $+i$, $-i$ und 0 aus, die Relation 5) ergiebt sich durch Berechnung von x und y aus den Gleichungen

$$r + \frac{1}{r} = 2a \quad \text{und} \quad \cos\varphi = \alpha$$

oder aus

$$\sqrt{x^2+y^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2a \quad \text{und} \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \alpha.$$

Führt man statt a und α die Koordinaten X und Y ein, so entsteht die kompliziertere Formel

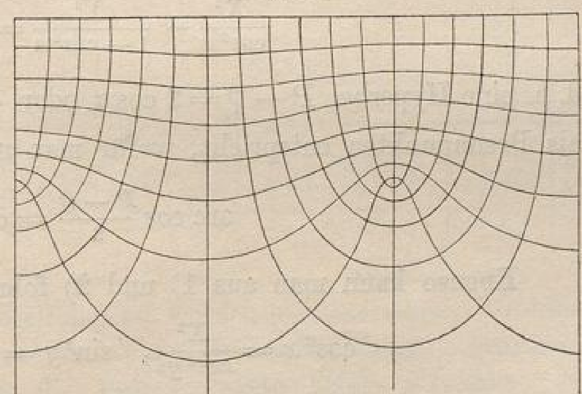
$$x = X + \sqrt{\frac{\sqrt{(X^2-Y^2-1)^2-4X^2Y^2}+(X^2-Y^2-1)}{2}}$$

$$y = Y + \sqrt{\frac{\sqrt{(X^2-Y^2-1)^2-4X^2Y^2}-(X^2-Y^2-1)}{2}}.$$

Über 6) vergleiche man die Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften. Die P und Q bezw. p und q gehen dabei von -1 aus. Es handelt sich um Bicircularkoordinaten. Dort findet man noch anderweitige Beziehungen.

197) Bemerkungen. Die elliptischen Koordinaten für Ebene und Raum sind für die Mechanik und die mathematische Physik von hervorragender Bedeutung geworden. Durch Abbildung des betreffenden Quadratnetzes der Ellipsen und Hyperbeln kann man zahlreiche komplizierte Linearprobleme lösen, z. B. über sternförmig angeordnete Sickerschlitze und dgl. Man versuche z. B. die Abbildungen $Z = \sqrt{z}$, $Z = \sqrt[n]{z}$ darauf anzuwenden.

Fig. 141.



So kann man z. B. durch $Z = \sqrt{z}$ das Problem der Geraden $F_1 F_2$ in das Problem zweier Geraden auf derselben Linie verwandeln, wobei eine Normale als Symmetrieachse auftritt. Man kann jetzt die Betrachtung auf die Halbebenen beschränken und diese durch die Abbildung $Z = z^2$ in eine aufgeschnittene Vollebene verwandeln. Durch die Abbildung $Z = \lg z$ erhält man dann eine Abbildung auf Parallelstreifen, durch die man die Maxwellsche Fig. 141 erhält, die nach rechts und nach oben und unten durch Symmetrie fortgesetzt gewisse Probleme über begrenzte und unbegrenzte Platten löst.

198) Abbildung $Z = \cos z$.

Auch die Parallelströmung in einem Streifen von der Breite 2π läfst sich direkt in die elliptisch-hyperbolische übertragen. Setzt man nämlich

$$X + Yi = \cos(x + yi) = \cos x \cos yi - \sin x \sin yi,$$

so folgt

$$X - Yi = \cos(x - yi) = \cos x \cos yi + \sin x \sin yi,$$

durch Addition folgt

1) $$X = \cos x \cos yi,$$

2) $$Y = \frac{\sin x \sin yi}{i}.$$

Aus 1) folgt

$$\cos^2 yi = \frac{X^2}{\cos^2 x}, \quad \text{aus 2)} \quad \sin^2 yi = -\frac{Y^2}{\sin^2 x},$$

da aber

$$\cos^2 yi + \sin^2 yi = 1,$$

so folgt

3) $$\frac{X^2}{\cos^2 x} - \frac{Y^2}{\sin^2 x} = 1,$$

so dafs den Geraden $x = a$ die Kurve

$$\frac{X^2}{\cos^2 a} - \frac{Y^2}{1 - \cos^2 a} = 1,$$

d. h. eine Hyperbel $P - Q = 2 \cos a$ oder $\frac{P - Q}{2} = \cos a$ mit $x = \pm 1$ als Brennpunkten entspricht, wofür man noch schreiben kann

$$\arccos \frac{P - Q}{2} = a.$$

Ebenso kann man aus 1) und 2) folgern

$$\cos^2 x = \frac{X^2}{\cos^2 yi}, \quad \sin^2 y = -\frac{Y^2}{\sin^2 yi},$$

so dafs aus $\cos^2 x + \sin^2 y = 1$ folgt

4) $$\frac{X^2}{\cos^2 yi} - \frac{Y^2}{\sin^2 yi} = 1.$$