



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

199) Diagonalprobleme und graphische Addition von Problemen

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77934](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77934)

Nun ist aber

$$\cos yi + i \sin yi = e^{i(yi)} = e^{-y}$$

also

$$\cos yi - i \sin yi = e^{-i(yi)} = e^y,$$

folglich ist

$$\cos yi = \frac{1}{2} (e^y + e^{-y}),$$

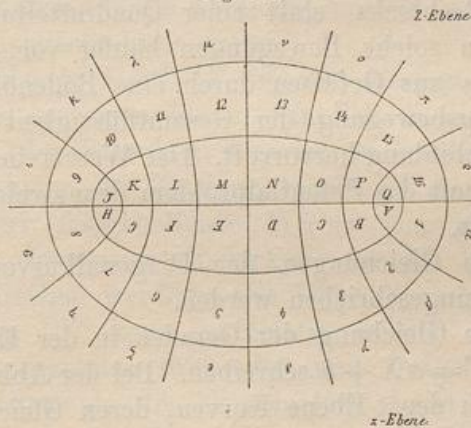
$$\sin yi = -\frac{1}{2i} (e^y - e^{-y}) = \frac{i}{2} (e^y - e^{-y}),$$

Gleichung 4) lässt sich also schreiben in der Form

$$5) \quad \frac{X^2}{\left[\frac{1}{2}(e^y + e^{-y})\right]^2} + \frac{Y^2}{\left[\frac{1}{2}(e^y - e^{-y})\right]^2} = 1,$$

so dass es sich um die konfokale Ellipsenschar handelt, die den Geraden $y = b$ entspricht. Fig. 142 zeigt, dass ein unendlicher senkrechter Streifen von der Breite 2π auf der elliptisch-hyperbolischen Ebene dargestellt ist, woraus sich neue Beziehungen ergeben. Der Periodizität des Streifens entspricht die der elliptischen Strömung und die der abbildenden Funktion $Z = \cos z$.

Fig. 142.



199) Bemerkungen über Diagonalprobleme und über graphische Addition von Problemen. Bildet man die Diagonal-

e	α	β	γ	δ	ϵ	ζ	η	θ	i	κ	λ	μ	ν	\omicron	π	ρ	σ
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Q	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	A
γ^2	δ	ϵ	ζ	η	θ	i	κ	λ	μ	ν	\omicron	π	ρ	σ	τ	δ	ϵ
ν	δ	ϵ	ζ	η	θ	i	κ	λ	μ	ν	\omicron	π	ρ	σ	τ	δ	ϵ

kurven einer quadratischen isothermischen Einteilung, so werden gewissermaßen Problem und Vertauschungsproblem in den Gesamtwirkungen graphisch addiert. Man denke sich die Potentialwerte beider Probleme auf den beiderseitigen Niveaulinien als Normalen auf der Ebene errichtet, nach oben, wenn sie positiv, nach unten, wenn sie negativ sind. Die Lote sind algebraisch zu addieren. Da nun die Teilung

quadratisch war, so folgt der Parameter c in beiden Problemen derselben arithmetischen Reihe. Beide Reihen sind entgegengesetzt, die eine zunehmend, die andere abnehmend zu denken, und so bleibt auf den Diagonalkurven die Summe konstant, sie werden die neuen Niveaulinien. Die Kraftlinien stehen von selbst senkrecht dagegen und fallen in die andere Diagonalrichtung. Man kann die Sache auch rein kinematisch deuten. Denkt man sich z. B. die Radialbewegung einer Flüssigkeit in früher besprochenen Linien und zugleich die Kreisbewegung des Vertauschungsproblems, und ist in beiden die Geschwindigkeit proportional $\frac{1}{r}$ (dem Reciproken des Abstandes vom Centrum), so findet die Bewegung auf der logarithmischen Spirale statt, die unter 45° schneidet. Wären beide Potentialwirkungen von ungleicher Intensität in dem Sinne, daß z. B. die eine Geschwindigkeit proportional $\frac{1}{r}$, die andere proportional $\frac{2}{r}$ wäre, so würde eine andere logarithmische Spirale entstehen. Man hätte die Diagonalen einer Rechtecks- statt einer Quadratteilung zu ziehen. Angenähert kommen solche Bewegungen häufig vor, z. B. beim Ausfließen des Wassers aus Gefäßen durch eine Bodenöffnung, wobei die geringste Drehungsbewegung der Gesamtflüssigkeit in den Stromlinien sofort Spiralenbildung hervorruft. Der Wasserstand muß bereits ein niedriger sein, damit das Potentialproblem dem zweidimensionalen sich möglichst annähert.

Die Gleichungen der Diagonalkurven können in allen Fällen sofort hingeschrieben werden.

Die Gleichung der Geraden in der Ebene läßt sich stets in der Form $Y = aX + b$ schreiben. Bei der Abbildung $Z = \lg z$ entsprechen ihnen in der z -Ebene Kurven, deren Gleichung nach Nr. 181 ist

$$\vartheta = a \lg r + b \quad \text{oder} \quad r = e^{\frac{\vartheta - b}{a}}$$

Durch die Abbildung $Z = \sqrt{z}$ gehen sie über in Kurven von der Form

$$(\vartheta_1 + \vartheta_2) = a (\lg p_1 + \lg p_2) + b = a \lg (p_1 p_2) + b$$

oder

$$p_1 p_2 = e^{\frac{(\vartheta_1 + \vartheta_2) - b}{a}}$$

Dies sind die Gleichungen der lemniskatischen Spiralen. Dagegen würden sie durch die Abbildung $Z = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ übergegangen sein in Kurven von der Gleichung

$$\frac{p+q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - 1} = e^{\frac{\arccos \frac{p-q}{2} - b}{a}}$$

Dies würden die elliptischen Spiralen, d. h. die Diagonalkurven der elliptischen Koordinaten sein. Bei der Quadratteilung vereinfacht sich die Formel, da man von den Gleichungen $Y = \pm X + b$ der zwei unter $\pm 45^\circ$ geneigten Linien ausgeht, was sofort beide Gruppen giebt. Es ist dann $a = 1$ zu setzen.

Denkt man sich bei dem einfachen Radialproblem eine magnetische Wirkung mit einer elektromagnetischen langer Drahtströme kombiniert, derart, daß die eine Radien, die andere Kreise als Kraftlinien giebt, so würden die Kraftlinien des Gesamtproblems mit den entsprechenden Diagonalkurven zusammenfallen.

Der Satz von der algebraischen Addition der Potentialwerte gestattet überall, bei gleichen Potentialdifferenzen zwischen den Niveaulinien zweier Probleme aus den Kraftlinien beider die Kraftlinien des Gesamtproblems graphisch abzuleiten, indem man die Diagonalkurven zieht. Ebenso kann man aus den Niveaulinien beider die des Gesamtproblems bilden. (Weil dies richtig ist für die einfachsten Fälle, so muß es durch konforme Abbildung mittels komplexer Funktionen auch für kompliziertere Fälle gelten.)

Es ist eine nützliche Übung, sämtliche Figuren, die man kennt, auf alle Art zu deuten und so einen klaren Einblick in die Idealprobleme der verschiedenen physikalischen Theorien zu erhalten. So kann man z. B. die Lemniskaten des Zweipunktproblems deuten als die Zusammensetzung zweier festgehaltener Wirbel von gleichem Drehungssinne, über deren gegenseitige Einwirkung für den Fall der Beweglichkeit wir später sprechen werden. Die Schar der sich nicht schneidenden Kreise in Fig. 127 kann aufgefaßt werden als die Kombination zweier entgegengesetzt drehender und festgehaltener Wirbel. Fig. 135 kann gelten als die Kombination dreier gleichwertiger Wirbel, von denen der mittlere entgegengesetzten Drehungssinn hat, als die beiden andern.

In Fig. 130 z. B. handelt es sich um 6 gleichwertige Wirbel mit festgehaltenem Centrum, von denen die drei inneren entgegengesetzten Drehungssinn haben, wie die äußeren.

Auf die entsprechenden elektromagnetischen Deutungen kommen wir noch ausführlicher zu sprechen.

200) Übergang von den Mehrpunktproblemen durch das Vertauschungsproblem zu den Fourierschen Wärme-problemen. Liegen mehrere punktförmige Elektroden auf einer Geraden, so gehört die Gerade selbst zu den Stromlinien. Diese Zusammengehörigkeit bleibt bei jeder konformen Abbildung, z. B. bei der durch Inversion geschehenden, erhalten. Bei letzterer geht die Gerade z. B. in einen im Endlichen liegenden Kreis über. Folglich: