



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

200) Übergang von den Mehrpunktproblemen durch das Vertauschungsproblem zu den Fourierschen Wärmeproblemen

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77934](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77934)

Dies würden die elliptischen Spiralen, d. h. die Diagonalkurven der elliptischen Koordinaten sein. Bei der Quadratteilung vereinfacht sich die Formel, da man von den Gleichungen $Y = \pm X + b$ der zwei unter $\pm 45^\circ$ geneigten Linien ausgeht, was sofort beide Gruppen giebt. Es ist dann $a = 1$ zu setzen.

Denkt man sich bei dem einfachen Radialproblem eine magnetische Wirkung mit einer elektromagnetischen langer Drahtströme kombiniert, derart, daß die eine Radien, die andere Kreise als Kraftlinien giebt, so würden die Kraftlinien des Gesamtproblems mit den entsprechenden Diagonalkurven zusammenfallen.

Der Satz von der algebraischen Addition der Potentialwerte gestattet überall, bei gleichen Potentialdifferenzen zwischen den Niveaulinien zweier Probleme aus den Kraftlinien beider die Kraftlinien des Gesamtproblems graphisch abzuleiten, indem man die Diagonalkurven zieht. Ebenso kann man aus den Niveaulinien beider die des Gesamtproblems bilden. (Weil dies richtig ist für die einfachsten Fälle, so muß es durch konforme Abbildung mittels komplexer Funktionen auch für kompliziertere Fälle gelten.)

Es ist eine nützliche Übung, sämtliche Figuren, die man kennt, auf alle Art zu deuten und so einen klaren Einblick in die Idealprobleme der verschiedenen physikalischen Theorien zu erhalten. So kann man z. B. die Lemniskaten des Zweipunktproblems deuten als die Zusammensetzung zweier festgehaltener Wirbel von gleichem Drehungssinne, über deren gegenseitige Einwirkung für den Fall der Beweglichkeit wir später sprechen werden. Die Schar der sich nicht schneidenden Kreise in Fig. 127 kann aufgefaßt werden als die Kombination zweier entgegengesetzt drehender und festgehaltener Wirbel. Fig. 135 kann gelten als die Kombination dreier gleichwertiger Wirbel, von denen der mittlere entgegengesetzten Drehungssinn hat, als die beiden andern.

In Fig. 130 z. B. handelt es sich um 6 gleichwertige Wirbel mit festgehaltenem Centrum, von denen die drei inneren entgegengesetzten Drehungssinn haben, wie die äußeren.

Auf die entsprechenden elektromagnetischen Deutungen kommen wir noch ausführlicher zu sprechen.

200) Übergang von den Mehrpunktproblemen durch das Vertauschungsproblem zu den Fourierschen Wärme-problemen. Liegen mehrere punktförmige Elektroden auf einer Geraden, so gehört die Gerade selbst zu den Stromlinien. Diese Zusammengehörigkeit bleibt bei jeder konformen Abbildung, z. B. bei der durch Inversion geschehenden, erhalten. Bei letzterer geht die Gerade z. B. in einen im Endlichen liegenden Kreis über. Folglich:

Liegen sämtliche Elektroden, die positiven wie die negativen, auf einem Kreise, so gehört dieser zu den Stromlinien. Damit neben dem Kreise nicht auch noch der unendlich ferne Punkt Elektrode sei, muß die Summe der einströmenden Elektrizitäten gleich Null sein. Während gegen die obige Gerade Symmetrie der Strom- und Niveaulinien stattfindet, ergibt sich hier Reciprozität des Kreisinnern und des Kreisäußern. Man braucht sich also nur mit dem Kreisinnern zu beschäftigen und darf die Kreisscheibe ausschneiden, ohne daß sich etwas ändert.

Ein Blick auf die nachstehende Figur zeigt nun, daß sich das Vertauschungsproblem folgendermaßen formulieren läßt: Als Elektroden mit der Einströmungssumme Null betrachte man die aufeinanderfolgenden Teile des Kreisumfangs. Dabei werden sich weder die Strom- noch die Niveaulinien ändern. Nur die Vertauschung beider Gruppen findet statt.

Hierbei wird allerdings fingiert, daß jede bandförmige Elektrode in ihrem ganzen Verlaufe konstantes Potential habe, was nach Margules (Bericht der Wiener Akademie vom 11. Mai 1877) nicht absolut genau sein wird, jedoch kann das ideale mathematische Problem die betreffende Voraussetzung machen. Dasselbe gilt auch von Wärmeeinströmungen in dem Sinne, daß die einzelnen Kreisbogen auf konstanten Temperaturen gehalten werden, wobei die Isothermen und Stromlinien dieselbe Gestalt behalten, wie vorher.

Damit gelangt man wiederum auf die Fourierschen Probleme mit Randbedingungen, und zwar auf solche, die mit elementaren Hilfsmitteln vollständig lösbar sind. Dabei soll von einer speziellen Aufgabe ausgegangen werden, die sich leicht verallgemeinern läßt. Wenn den Punkten dabei eine regelmäßige Lage gegeben wird, so geschieht dies nur, um das Zeichnen der beiden Kurvensysteme zu erleichtern. Da übrigens durch drei Punkte stets ein Kreis gelegt werden kann, ist bei dieser Anzahl der Kreis stets Stromlinie.

201) **Aufgabe.** Drei Punkte A_1, A_2, A_3 einer Ebene mögen ein gleichseitiges Dreieck bilden. In A_1 ströme Wärme oder Elektrizität ein, in A_2 und A_3 ströme sie in gleichen Teilen aus. Das Stromnetz soll untersucht werden.

Auflösung. Nach Nr. 175 werden, da die ein- und ausströmenden Massen sich wie 2:—1:—1 verhalten, die Gleichungen der Niveaulinien von der Form

$$1) \quad 2 \lg r_1 - \lg r_2 - \lg r_3 = c,$$

oder