Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

201) Das Dreipunktproblem der Wärmeströmung

Liegen sämtliche Elektroden, die positiven wie die negativen, auf einem Kreise, so gehört dieser zu den Stromlinien. Damit neben dem Kreise nicht auch noch der unendlich ferne Punkt Elektrode sei, mufs die Summe der einströmenden Elektrizitäten gleich Null sein. Während gegen die obige Gerade Symmetrie der Strom- und Niveaulinien stattfindet, ergiebt sich hier Reciprozität des Kreisinnern und des Kreisäufsern. Man braucht sich also nur mit dem Kreisinnern zu beschäftigen und darf die Kreisscheibe ausschneiden, ohne dafs sich etwas ändert.

Ein Blick auf die nachstehende Figur zeigt nun, dafs sich das Vertauschungsproblem folgendermafsen formulieren läfst: Als Elektroden mit der Einströmungssumme Null betrachte man die aufeinanderfolgenden Teile des Kreisumfangs. Dabei werden sich weder die Strom- noch die Niveaulinien ändern. Nur die Vertauschung beider Gruppen findet statt.

Hierbei wird allerdings fingiert, dafs jede bandförmige Elektrode in ihrem ganzen Verlaufe konstantes Potential habe, was nach Margules (Bericht der Wiener Akademie vom 11. Mai 1877) nicht absolut genau sein wird, jedoch kann das ideale mathematische Problem die betreffende Voraussetzung machen. Dasselbe gilt auch von Wärmeeinströmungen in dem Sinne, dafs die einzelnen Kreisbogen auf konstanten Temperaturen gehalten werden, wobei die Isothermen und Stromlinien dieselbe Gestalt behalten, wie vorher.

Damit gelangt man wiederum auf die Fourierschen Probleme mit Randbedingungen, und zwar auf solche, die mit elementaren Hilfsmitteln vollständig lösbar sind. Dabei soll von einer speziellen Aufgabe ausgegangen werden, die sich leicht verallgemeinern läfst. Wenn den Punkten dabei eine regelmäfsige Lage gegeben wird, so geschieht dies nur, um das Zeichnen der beiden Kurvensysteme zu erleichtern. Da übrigens durch drei Punkte stets ein Kreis gelegt werden kann, ist bei dieser Anzahl der Kreis stets Stromlinie.

201) **Aufgabe.** Drei Punkte A_1, A_2, A_3 einer Ebene mögen ein gleichseitiges Dreieck bilden. In A_1 ströme Wärme oder Elektrizität ein, in A_2 und A_3 ströme sie in gleichen Teilen aus. Das Stromnetz soll untersucht werden.

Auflösung. Nach Nr. 175 werden, da die ein- und ausströmenden Massen sich wie $2:-1:-1$ verhalten, die Gleichungen der Niveaulinien von der Form

$$1) \qquad 2 \lg r_1 - \lg r_2 - \lg r_3 = c,$$

oder

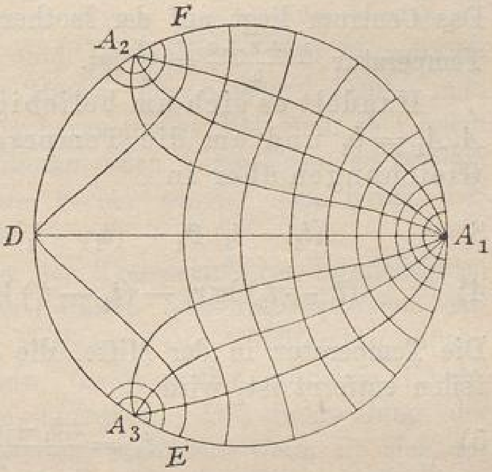
1*) $$\frac{r_1^2}{r_2\, r_3} = e^c,$$

die der Stromlinien von der Form

2) $$2\,\vartheta_1 - \vartheta_2 - \vartheta_3 = \gamma.$$

Die Zahl der von A_1 ausgehenden Stromkanäle ist doppelt so grofs, wie die der in A_2 oder A_3 endenden. Aus Symmetriegründen gehört der Durchmesser AD zu den Stromlinien. Unter den Niveaulinien spielen die Kurven DF und DE, durch welche die rechten Winkel bei D halbiert werden, eine Ausnahmerolle.

Fig. 143.



202) Das zugehörige Vertauschungsproblem. Der Bogen $A_1 A_2$ werde durch Wärmezufuhr auf konstanter Temperatur t_1 gehalten, $A_2 A_3$ auf t_2, $A_3 A_1$ auf t_3. In der Figur ist die Zahl der zwischen $A_1 A_2$ und $A_3 A_1$ liegenden Niveaustreifen doppelt so grofs, als die der zwischen $A_1 A_2$ und $A_2 A_3$ bezw. zwischen $A_2 A_3$ und $A_3 A_1$ liegenden. Dasselbe gilt von der Anzahl der Wärmeabstufungen oder Potentialdifferenzen. Der Wärmeunterschied zwischen $A_3 A_1$ und $A_1 A_2$ mufs also (absolut genommen) doppelt so grofs sein, als der Wärmeunterschied zwischen $A_1 A_2$ und $A_2 A_3$ bezw. zwischen $A_2 A_3$ und $A_3 A_1$, wenn die beiden Probleme identisch bleiben sollen.

Dem wird genügt, wenn man

$$t_1 - t_2 = +\varkappa, \quad t_2 - t_3 = +\varkappa, \quad t_3 - t_1 = -2\varkappa$$

oder noch einfacher

$$t_1 - t_2 = 1, \quad t_2 - t_3 = 1, \quad t_3 - t_1 = -2$$

setzt. Die letzte Gleichung ist jedesmal eine Folge der beiden ersten, und es ist in jedem Falle

$$(t_1 - t_2) + (t_2 - t_3) + (t_3 - t_1) = 0.$$

Dem genügen z. B. die Temperaturen 2^0, 1^0, 0^0, ebenso die Temperaturen 16^0, 8^0, 0^0.

Jetzt erhalten die Niveaulinien (Isothermen) die Gleichung