Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

202) Das zugehörige Vertauschungsproblem

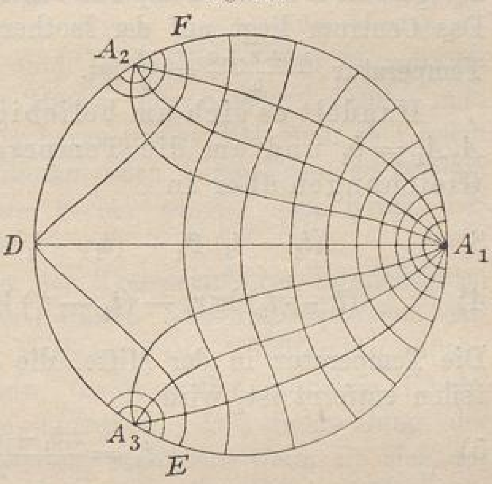
1*) $$\frac{r_1^2}{r_2\, r_3} = e^c,$$

die der Stromlinien von der Form

2) $$2\vartheta_1 - \vartheta_2 - \vartheta_3 = \gamma.$$

Die Zahl der von A_1 ausgehenden Stromkanäle ist doppelt so grofs, wie die der in A_2 oder A_3 endenden. Aus Symmetriegründen gehört der Durchmesser AD zu den Stromlinien. Unter den Niveaulinien spielen die Kurven DF und DE, durch welche die rechten Winkel bei D halbiert werden, eine Ausnahmerolle.

Fig. 143.



202) Das zugehörige Vertauschungsproblem. Der Bogen A_1A_2 werde durch Wärmezufuhr auf konstanter Temperatur t_1 gehalten, A_2A_3 auf t_2, A_3A_1 auf t_3. In der Figur ist die Zahl der zwischen A_1A_2 und A_3A_1 liegenden Niveaustreifen doppelt so grofs, als die der zwischen A_1A_2 und A_2A_3 bezw. zwischen A_2A_3 und A_3A_1 liegenden. Dasselbe gilt von der Anzahl der Wärmeabstufungen oder Potentialdifferenzen. Der Wärmeunterschied zwischen A_3A_1 und A_1A_2 mufs also (absolut genommen) doppelt so grofs sein, als der Wärmeunterschied zwischen A_1A_2 und A_2A_3 bezw. zwischen A_2A_3 und A_3A_1, wenn die beiden Probleme identisch bleiben sollen.

Dem wird genügt, wenn man

$$t_1 - t_2 = +\varkappa, \quad t_2 - t_3 = +\varkappa, \quad t_3 - t_1 = -2\varkappa$$

oder noch einfacher

$$t_1 - t_2 = 1, \quad t_2 - t_3 = 1, \quad t_3 - t_1 = -2$$

setzt. Die letzte Gleichung ist jedesmal eine Folge der beiden ersten, und es ist in jedem Falle

$$(t_1 - t_2) + (t_2 - t_3) + (t_3 - t_1) = 0.$$

Dem genügen z. B. die Temperaturen 2^0, 1^0, 0^0, ebenso die Temperaturen 16^0, 8^0, 0^0.

Jetzt erhalten die Niveaulinien (Isothermen) die Gleichung

1) $$2\vartheta_1 - \vartheta_2 - \vartheta_3 = \gamma,$$

die Stromlinien die Gleichung

2) $$2\lg r_1 - \lg r_2 - \lg r_3 = c.$$

Man beachte, wie in der Zeichnung der Bogen A_1F seine Wärme nach EA_1 schickt, der Bogen FA_2 nach A_2D, der Bogen DA_3 nach A_3E, so dafs die geknickte Kurve FDE die einzelnen Bereiche voneinander scheidet. Die Isothermen haben von A_1A_2 aus gezählt z. B. die Temperaturen 16°, 14°, 12°, 10°, 8°, 6°, 4°, 2°, 0°. Das Centrum liegt auf der Isotherme A_1D von 8°, was die mittlere Temperatur $\frac{16+8+0}{3} = \frac{24}{3}$ ist.

Handelt es sich um beliebige Bogen $A_1A_2 = b_1$, $A_2A_3 = b_2$, $A_3A_1 = b_3$ und um die Temperaturen t_1, t_2, t_3, so gehen die Gleichungen über in

3) $$(t_1 - t_3)\,\vartheta_1 - (t_2 - t_1)\,\vartheta_2 - (t_3 - t_2)\,\vartheta_3 = \gamma,$$

4) $$(t_1 - t_3)\lg r_1 - (t_2 - t_1)\lg r_2 - (t_3 - t_2)\lg r_3 = c$$

Die Temperatur in der Mitte, die gleichweit von sämtlichen Bogenteilen entfernt ist, wird

5) $$t_\mu = \frac{t_1b_1 + t_2b_2 + t_3b_3}{2r\pi}.$$

Handelt es sich um n Bogen $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ und um konstante Temperaturen $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ im obigen Sinne, so gehen die Gleichungen über in

6) $$(t_1 - t_n)\,\vartheta_1 - (t_2 - t_1)\,\vartheta_2 + \ldots + (t_n - t_{n-1})\,\vartheta_n = \gamma$$

6) $$(t_1 - t_n)\lg r_1 + (t_2 - t_1)\lg r_2 + \ldots + (t_n - t_{n-1})\lg r_n = c,$$

8) $$t_\mu = \frac{t_1b_1 + t_2b_2 + \ldots + t_nb_n}{2r\pi}.$$

Durch Abbildung mittels irgend welcher Funktionen komplexen Arguments, z. B. durch die lemniskatische Abbildung $Z = \sqrt{z}$ (vgl. Ingenieur-Mathematik I Seite 175) kann man von den Randproblemen des Kreises zu anderen, z. B. zu denen der Lemniskate übergehen. An Stelle der Bogen mit konstanten Temperaturen kann man Elektroden von konstantem Potential und konstanter Ergiebigkeit t_1, t_2, $\ldots$ t_n setzen, wobei die Gleichungen dieselben bleiben. [In der Zeitschrift für Math. u. Phys. Jahrgang 1897, Seite 218 bis 246 ist das betreffende Problem vom Verfasser ausführlicher behandelt und mit anderen Gebieten der math. Physik in Beziehung gesetzt worden.]