Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

204) Bemerkungen über Periodizität

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

203) Andere Fouriersche Probleme. Handelt es sich um eine endliche Anzahl von Kreisbogen auf konstant gehaltener Temperatur, so gehen die Stromlinien überall, mit Ausnahme der Grenzpunkte, senkrecht von der Kreisperipherie aus, die selbst zu den Niveaulinien gehört.

Anders ist es, wenn die einzelnen Bogen unendlich klein sind, selbst wenn die Änderungen der Temperatur von einer Randstelle zur andern stetig vor sich gehen. (Es ist der Fall unendlich vieler Elektroden.)

Um dies zu verstehen, schlage man z. B. im lemniskatischen Zweipunktprobleme der Ebene einen Kreis, der die beiden Quellpunkte ausschliefst. Die Strom- und Niveaulinien sind überall die des Zweipunktproblems, auch im Innern des Kreises. Denkt man sich jetzt diesen aus der Umgebung herausgelöst, hält man aber jeden Punkt des Randes auf der ihm zukommenden Temperatur, so bleiben die Niveaulinien dieselben, die sie vorher waren. Der Kreis aber gehört nicht zu ihnen.

In ähnlicher Weise kann man der Kreisperipherie Temperaturen geben, die jedem beliebigen anderen Punkt- oder Linearproblem entsprechen, dessen Lösung bereits vorliegt. Die Quellpunkte mögen dabei vorläufig ausgeschlossen sein, damit weder auf dem Rande, noch im Innern Diskontinuitäten auftreten. Die Behandlung der letzteren ist nicht ohne Schwierigkeiten, besonders wenn sie sich auf endlichem Raum zu unendlicher Zahl häufen. Die Untersuchung gehört dann nicht mehr der Elementarmathematik an.

Wir können hier nur Probleme besprechen, deren Lösungen nach der früheren Betrachtung bereits bekannt sind. Die allgemeinste Fouriersche Aufgabe kann allerdings grundsätzlich als bereits gelöst betrachtet werden, jedoch sind geschlossene Lösungen, bei denen nicht erst noch unendliche Reihen summiert werden müssen, nur in einer Anzahl von Fällen vorhanden, die im wesentlichen mit den hier synthetisch als lösbar angedeuteten zusammenfallen. (Zu den letzteren sind auch die mit den elliptischen Funktionen zusammenhängenden zu rechnen.)

204) Bemerkungen über Periodizität.

a) Mit Hilfe zweier orthogonaler Parallelenscharen kann man die Ebene in ∞^2 Quadrate von endlichen Dimensionen einteilen. Jede Abbildung mit Hilfe algebraischer Funktionen verwandelt ein solche Einteilung wiederum in eine solche, bei der die Anzahl der Quadrate unendlich grofs 2^{ter} Ordnung ist. Soll die Abbildung auf ∞^1 Quadrate führen, so sind transscendente Funktionen nötig, die einfache Periodizität besitzen. Soll nur eine endliche Anzahl von Quadraten entstehen, so sind doppeltperiodische Funktionen erforderlich.

b) Mit Hilfe des Strahlenbüschels durch einen Punkt der koncentrischen Kreisschar erhält man ∞^1 „Quadrate“ von endlichen Dimensionen. Durch algebraische Abbildung der Zeichnung ergeben sich Isothermenscharen, die ebenfalls ∞^1 Quadrate geben. Zum Übergange von Gruppe a) nach Gruppe b) dient z. B. die Abbildung $Z = e^z$, oder auch

$$Z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} = \cos z, \quad Z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} = \sin z,$$

u. s. w. Diese Abbildungen müssen wegen des Überganges von ∞^2 zu ∞^1 Quadraten einfach periodisch sein, ihre Umkehrungen unendlich vieldeutig. Bei $Z = e^z$ ist die Periode imaginär, nämlich gleich $2\pi i$, bei $Z = \cos z$ und $Z = \sin z$ ist sie reell, gleich 2π. Auch Kombinationen von transscendenten und algebraischen Funktionen, wie die unten zu behandelnde $Z = z + e^z$, ebenso algebraische Funktionen von transscendenten Funktionen teilen die Eigenschaft der einfachen Periodizität bezw. einfach unendlichen Vieldeutigkeit.

Auch bei algebraischen Funktionen, z. B. bei den irrationalen, kommt Vieldeutigkeit vor, diese ist aber im allgemeinen eine endliche. Den Übergang bilden Wurzeln mit irrationalem Exponenten, der ebenfalls auf unendliche Vieldeutigkeit führt.

Will man also die Einteilung der Ebene in eine endliche Anzahl von Quadraten ermöglichen, so mufs man zu den doppeltperiodischen Funktionen übergehen, welche die reelle Periode der goniometrischen Funktionen und die imaginäre Periode der Exponentialfunktion in sich vereinigen. Die wichtigsten und einfachsten der damit zusammenhängenden Isothermenscharen findet man nebst Litteraturangaben in des Verfassers „Theorie der isogonalen Verwandtschaften“. Die dortigen Figuren klären über das Notwendigste auf. Sie stehen nicht nur in Beziehungen zur Potentialtheorie, sondern auch zur Festigkeitslehre und sonstigen Gebieten. Einige Bemerkungen dazu sind schon in Bd. I der Ing.-Mathematik Seite 199 gemacht worden. Sie schliefsen sich an den Fall des Quadrates und der quadratischen Weltkarte von Peirce an.

205) Grenzlinien für den elementaren Ausbau der Ingenieur-Mathematik und Potentialtheorie. Zur Behandlung der Gruppen a) und b) ist höhere Mathematik im allgemeinen zu entbehren, obwohl die elementare Behandlung unbequem werden kann. Aber schon die Behandlung der Kurven gleicher Intensität und gleicher Stromrichtung macht die Anwendung der höheren Analysis wünschens-