Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

205) Grenzlinien für den elementaren Ausbau der Ingenieur-Mathematik

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

zahl von Quadraten entstehen, so sind doppeltperiodische Funktionen erforderlich.

b) Mit Hilfe des Strahlenbüschels durch einen Punkt der koncentrischen Kreisschar erhält man ∞^1 „Quadrate" von endlichen Dimensionen. Durch algebraische Abbildung der Zeichnung ergeben sich Isothermenscharen, die ebenfalls ∞^1 Quadrate geben. Zum Übergange von Gruppe a) nach Gruppe b) dient z. B. die Abbildung $Z = e^z$, oder auch

$$Z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} = \cos z, \quad Z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} = \sin z,$$

u. s. w. Diese Abbildungen müssen wegen des Überganges von ∞^2 zu ∞^1 Quadraten einfach periodisch sein, ihre Umkehrungen unendlich vieldeutig. Bei $Z = e^z$ ist die Periode imaginär, nämlich gleich $2\pi i$, bei $Z = \cos z$ und $Z = \sin z$ ist sie reell, gleich 2π. Auch Kombinationen von transscendenten und algebraischen Funktionen, wie die unten zu behandelnde $Z = z + e^z$, ebenso algebraische Funktionen von transscendenten Funktionen teilen die Eigenschaft der einfachen Periodizität bezw. einfach unendlichen Vieldeutigkeit.

Auch bei algebraischen Funktionen, z. B. bei den irrationalen, kommt Vieldeutigkeit vor, diese ist aber im allgemeinen eine endliche. Den Übergang bilden Wurzeln mit irrationalem Exponenten, der ebenfalls auf unendliche Vieldeutigkeit führt.

Will man also die Einteilung der Ebene in eine endliche Anzahl von Quadraten ermöglichen, so mufs man zu den doppeltperiodischen Funktionen übergehen, welche die reelle Periode der goniometrischen Funktionen und die imaginäre Periode der Exponentialfunktion in sich vereinigen. Die wichtigsten und einfachsten der damit zusammenhängenden Isothermenscharen findet man nebst Litteraturangaben in des Verfassers „Theorie der isogonalen Verwandtschaften". Die dortigen Figuren klären über das Notwendigste auf. Sie stehen nicht nur in Beziehungen zur Potentialtheorie, sondern auch zur Festigkeitslehre und sonstigen Gebieten. Einige Bemerkungen dazu sind schon in Bd. I der Ing.-Mathematik Seite 199 gemacht worden. Sie schliefsen sich an den Fall des Quadrates und der quadratischen Weltkarte von Peirce an.

205) Grenzlinien für den elementaren Ausbau der Ingenieur-Mathematik und Potentialtheorie. Zur Behandlung der Gruppen a) und b) ist höhere Mathematik im allgemeinen zu entbehren, obwohl die elementare Behandlung unbequem werden kann. Aber schon die Behandlung der Kurven gleicher Intensität und gleicher Stromrichtung macht die Anwendung der höheren Analysis wünschens-

wert. Gruppe c) aber tritt vollständig aus der Möglichkeit elementarer Behandlung heraus. Die Grenzlinie der letzteren ist also festgelegt durch die einfacheren transscendenten Funktionen, die als goniometrische und Exponentialfunktionen bezw. cyclometrische und logarithmische Funktionen auftreten. So grofse Fortschritte durch die höheren Funktionen auch erzielt werden können, man bleibt nach einem Ausspruche von Dubois-Reymond doch auf das Strandwasser des Ozeans der Funktionentheorie beschränkt.

Als Beispiele von Problemen, die sich an jener Grenzlinie befinden, sind im folgenden einige herausgegriffen. Obwohl die höhere Analysis vermieden ist, sind sie doch nur für vorgeschrittene Leser bestimmt. Andere mögen sie überschlagen. Aufgenommen wurden sie aus dem Grunde, weil durch sie die Theorie der Kondensatoren und der Schutzringe verfeinert wird, und weil sie zweitens in die berühmten Arbeiten von Helmholtz und Kirchhoff über die Theorie der freien Ausflufsstrahlen einführen und ein neues Licht auf die schon vielfach besprochenen hydrodynamischen Analogien werfen. Man wird daraus entnehmen, von welcher Bedeutung die Methode der konformen Abbildung für viele Teile der mathematischen Physik ist. Auf diesem Gebiete findet sich noch mancherlei lohnende Arbeit für den angehenden Forscher.

206) Die Abbildung $Z = z + e^z$. Diese Abbildung ist zuerst von Helmholtz für hydrodynamische Zwecke behandelt worden. Sie giebt aber auch die Theorie der ebenen Kondensatoren und des Schutzringes am Thomsonschen Elektrometer. Sie soll hier ganz elementar behandelt werden.

Aus

$$Z = z + e^z$$

oder

$$X + Yi = (x + yi) + e^{(x+yi)} = x + yi + e^x e^{yi} = x + yi + e^x(\cos y + i \sin y)$$

folgt durch Gleichsetzung der reellen und ebenso der imaginären Teile

1) $$X = x + e^x \cos y,$$

2) $$Y = y + e^x \sin y.$$

Für jeden Punkt x, y der z-Ebene kann man also die Koordinaten X, Y des ihm entsprechenden der Z-Ebene berechnen und so durch Rechnung die Abbildung ausführen.

Es fragt sich, was für Kurven den Geraden $x = a$ und $y = b$ in der Z-Ebene entsprechen. Setzt man in beiden Gleichungen $x = a$, so erhält man

$$X = a + e^a \cos y, \quad Y = y + e^a \sin y.$$