# Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig, 1898**

206) Die Abbildung $Z=z+e^2$ und die entsprechenden Strömungen

wert. Gruppe c) aber tritt vollständig aus der Möglichkeit elementarer Behandlung heraus. Die Grenzlinie der letzteren ist also festgelegt durch die einfacheren transscendenten Funktionen, die als goniometrische und Exponentialfunktionen bezw. cyclometrische und logarithmische Funktionen auftreten. So grofse Fortschritte durch die höheren Funktionen auch erzielt werden können, man bleibt nach einem Ausspruche von Dubois-Reymond doch auf das Strandwasser des Ozeans der Funktionentheorie beschränkt.

Als Beispiele von Problemen, die sich an jener Grenzlinie befinden, sind im folgenden einige herausgegriffen. Obwohl die höhere Analysis vermieden ist, sind sie doch nur für vorgeschrittene Leser bestimmt. Andere mögen sie überschlagen. Aufgenommen wurden sie aus dem Grunde, weil durch sie die Theorie der Kondensatoren und der Schutzringe verfeinert wird, und weil sie zweitens in die berühmten Arbeiten von Helmholtz und Kirchhoff über die Theorie der freien Ausflufsstrahlen einführen und ein neues Licht auf die schon vielfach besprochenen hydrodynamischen Analogien werfen. Man wird daraus entnehmen, von welcher Bedeutung die Methode der konformen Abbildung für viele Teile der mathematischen Physik ist. Auf diesem Gebiete findet sich noch mancherlei lohnende Arbeit für den angehenden Forscher.

206) Die Abbildung $Z = z + e^z$. Diese Abbildung ist zuerst von Helmholtz für hydrodynamische Zwecke behandelt worden. Sie giebt aber auch die Theorie der ebenen Kondensatoren und des Schutzringes am Thomsonschen Elektrometer. Sie soll hier ganz elementar behandelt werden.

Aus

$$Z = z + e^z$$

oder

$$X + Yi = (x + yi) + e^{(x+yi)} = x + yi + e^x e^{yi} = x + yi + e^x(\cos y + i \sin y)$$

folgt durch Gleichsetzung der reellen und ebenso der imaginären Teile

$$1)\qquad X = x + e^x \cos y,$$

$$2)\qquad Y = y + e^x \sin y.$$

Für jeden Punkt $x, y$ der $z$-Ebene kann man also die Koordinaten $X, Y$ des ihm entsprechenden der $Z$-Ebene berechnen und so durch Rechnung die Abbildung ausführen.

Es fragt sich, was für Kurven den Geraden $x = a$ und $y = b$ in der $Z$-Ebene entsprechen. Setzt man in beiden Gleichungen $x = a$, so erhält man

$$X = a + e^a \cos y, \quad Y = y + e^a \sin y.$$

Aus der ersteren kann man $\cos y$ berechnen, daraus $y$ und $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y}$ bestimmen und beides in die zweite einsetzen. Man erhält als Gleichung der den Graden $x = a$ entsprechenden Kurven

$$Y = \operatorname{arc}\cos\frac{X-a}{e^a} + e^a\sqrt{1-\left(\frac{X-a}{e^a}\right)^2}$$

oder

3) $$Y = \operatorname{arc}\cos\frac{X-a}{e^a} + \sqrt{e^{2a}-(X-a)^2}.$$

Dafür kann man auch schreiben

3*) $$X = e^a\cos\left[Y-\sqrt{e^{2a}-(X-a)^2}\right] + a.$$

Der Geraden $x = o$ z. B. entspricht die Kurve

4) $$Y = \operatorname{arc}\cos X + \sqrt{1-X^2}$$

4*) $$X = \cos\left[Y-\sqrt{1-X^2}\right].$$

Setzt man dagegen $y = b$ in die Gleichungen 1) und 2) ein, so entsteht

$$X = x + e^x\cos b\,, \quad Y = b + e^x\sin b.$$

Aus der zweiten kann man $e^x$, also auch $x$ berechnen und beides in die erste einsetzen. Man erhält als Gleichung der den Geraden $y = b$ entsprechenden Kurven

$$X = \lg\frac{Y-b}{\sin b} + \frac{Y-b}{\sin b}\cos b$$

oder

5) $$X = \lg\frac{Y-b}{\sin b} + \frac{Y-b}{\tan b},$$

wofür man auch schreiben kann

5*) $$Y = \sin b\left[e^{X-\frac{Y-b}{\tan b}}\right] + b.$$

Ist z. B. $b = o$, so ist auch $Y = o$, d. h. die $X$-Achsen beider Ebenen entsprechen einander. Ist ferner $b = \pm\pi$, so ist auch $Y = \pm\pi$, so dafs auch die Geraden $y = \pm\pi$ und $Y = \pm\pi$ einander entsprechen.

Man hat nun zu untersuchen, auf welche Strecken hin dieses gegenseitige Entsprechen der Geraden stattfindet.

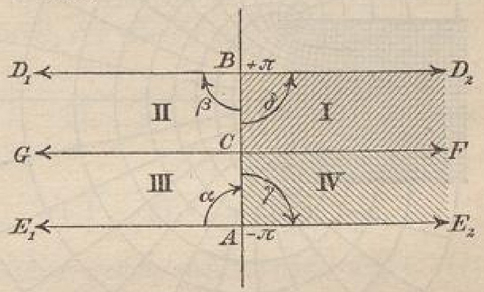
Setzt man $y = o$ und geht man dann in der $z$-Ebene von $x = -\infty$ bis $x = o$ und von da nach $x = +\infty$, so geht man nach 1) in der $Z$-Ebene von $-\infty + e^{-\infty}\cos o$ oder $-\infty$ nach $o + e^o\cos y = +1$ und von da nach $\infty + e^\infty\cos o = +\infty$. Beide Geraden entsprechen einander in ihrer ganzen Länge, nur entspricht dem Punkte $x = o$ der Punkt $X = +1$.

Setzt man dagegen $y = \pi$ und macht man in der $z$-Ebene wieder den Weg von $x = -\infty$ über $x = o$ nach $x = +\infty$ auf dieser Linie, so geht man in der $Z$-Ebene auf der Geraden $Y = \pi$ von $X = -\infty + e^{-\infty} \cdot \cos\pi = -\infty$ nach $o + e^{o} \cdot \cos\pi = -1$ und dann nach $\infty + e^{\infty} \cdot \cos\pi = \infty - e^{\infty} = \infty - \left(1 + \frac{\infty}{1} + \frac{\infty^2}{1 \cdot 2} + \frac{\infty^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots\right) = -\infty$. Dem Wege von $-\infty$ über $o$ nach $+\infty$ in der $z$-Ebene entspricht also jetzt der Weg von $-\infty$ nach $-1$ und von da zurück nach $-\infty$. Der Punkt mit den Koordinaten $Y = \pi$ und $X = -1$ ist also eine singuläre Stelle, deren Bedeutung noch näher auseinander zu setzen ist.

Ebenso ist es aus Symmetriegründen mit den Geraden $y = -\pi$ bezw. $Y = -\pi$, so dafs auch der Punkt $Y = -\pi$, $X = -1$ von singulärer Bedeutung ist.

$z$-Ebene.

Fig. 144a.

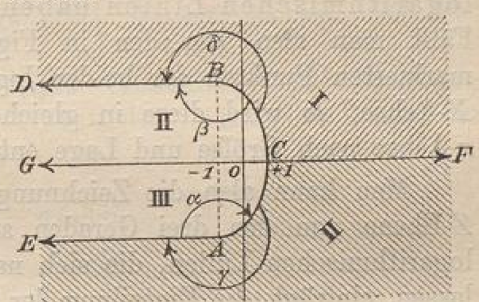



Man beschränke die Betrachtung in der $z$-Ebene zunächst auf einen horizontalen Streifen von der Breite $2\pi$, der von den Geraden $y = \pm\pi$ eingeschlossen, aber im übrigen unbegrenzt ist.

Wie die Abbildung $Z = e^z$ diesen Streifen auf die gesamte $Z$-Ebene überträgt, ist dies auch bei unserer Abbildung $Z = z + e^z$ der Fall, aber in anderer Weise. In Fig. 144 ist das gegenseitige Entsprechen für die vier Quadranten des Streifens zunächst ganz roh dargestellt, wobei die Pfeile andeuten, dafs die Linien sich bis ins Unendliche erstrecken. In der $Z$-Ebene ist die Schraffierung nach aufsen bis ins Unendliche fortzusetzen, der weifs gelassene Streifen ist jedoch von der Kurve $BCA$ begrenzt, deren Gleichung in Nr. 4 gegeben war.

$Z$-Ebene.

Fig. 144b.




Denkt man sich den Streifen der $z$-Ebene in 24 horizontale Parallelstreifen zerlegt und dann von $x = o$ aus durch Senkrechte in regelrechte Quadrate eingeteilt, so giebt die Berechnung der den Eckpunkten der Quadrate in der andern Ebene entsprechenden Punkte die Fig. 144c.

Unter den Kurven, die den horizontalen Parallelen entsprechen, sind zwei von besonderer Bedeutung, die den Parallelen $y = \pm\frac{\pi}{2}$

entsprechenden. Setzt man diesen Wert ein, so geht Gleichung 5*) über in

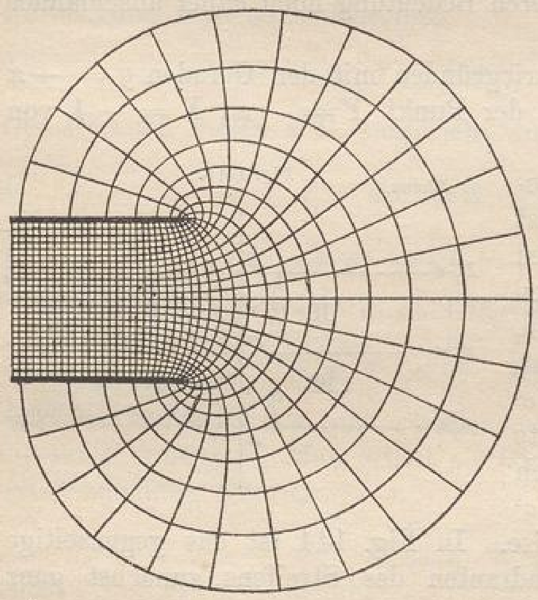
6) $$Y = e^X + \frac{\pi}{2}, \quad \text{bezw.} \quad Y = -e^X - \frac{\pi}{2}.$$

Dies sind die Gleichungen zweier logarithmischen Linien. (Rechts von der $X$-Achse aus nach oben und unten gezählt handelt es sich um die $\pm$ 6te Kurve.) Die erstere unterscheidet sich nur dadurch von der Kurve $Y = e^X$, dafs sie um $\frac{\pi}{2}$ nach oben verschoben ist. Die andere ist das Spiegelbild der verschobenen Kurve in Bezug auf die $X$-Achse. Setzt man aber $y = \pm \frac{\pi}{2}$, so geht die Gleichung 1) über in $X = x + e^x \cdot \cos\left(\pm \frac{\pi}{2}\right)$ oder in

$$X = x,$$

d. h. die Punkte auf den Geraden $y = \pm \frac{\pi}{2}$ und die entsprechenden auf den durch 6) dargestellten logarithmischen Linien haben übereinstimmende Abscissen.

Fig. 144c.




Fällt man also von den in Fig. 144c durch die Quadratteilung markierten Punkten der beiden logarithmischen Linien Lote auf die $X$-Achse, so wird diese in gleiche Stücke eingeteilt, die denen der $x$-Achse nach Gröfse und Lage entsprechen.

Man kann also die Zeichnung vereinfachen, indem man in der $Z$-Ebene von den drei Geraden ausgeht, die beiden symmetrischen logarithmischen Linien, die sich nach Nr. 161 elementar konstruieren lassen, einträgt, die Einteilung der $x$-Achse hilfsweise auf die $X$-Achse überträgt, Lote errichtet und so auf den logarithmischen Linien die Schnittpunkte der den Linien $x = a$ entsprechenden Kurven aufträgt, die eine quadratische Einteilung geben.

Die Funktion $Z = z + e^z$ ist eine einfach periodische mit der Periode $2\pi$, ihre Umkehrung also unendlich vieldeutig. Es fragt sich, was den sich anschliefsenden Parallelstreifen der $z$-Ebene entspricht. Die Antwort ergiebt sich, sobald man $y$ z. B. gleich $c + 2\pi$, $\pi + 2\pi$,

$-\pi + 2\pi$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi$, $\frac{\pi}{2} - 2\pi$ setzt. Dem nächsten oberen Streifen der $z$-Ebene von Breite $2\pi$ entspricht dieselbe Figur noch einmal, jedoch um $2\pi$ nach oben verschoben. Man kann sich diese zweite Ebene mit ihrer Zeichnung als eine zweite Schicht denken, die über der andern liegt. Dasselbe kann man mit der Verschiebung um $-2\pi$ machen und diese Schicht unter der ursprünglichen denken, und so kann man mit $\pm 4\pi$, $\pm 6\pi$, $\pm 8\pi \ldots$ fortfahren. Dadurch erhalten sämtliche an den horizontalen Grenzlinien scheinbar unterbrochenen Kurven ihre Fortsetzungen. Zeichnet man diese, so sind sämtliche Geraden $Y = \pm n\pi$ Symmetrieachsen der Gesamtzeichnung.

Die Kurve, die der Geraden $x = o$ entspricht, geht dann ähnlich, wie die als Cykloide bezeichnete Rollkurve des Einheitskreises auf der Linie $X = -1$ nach oben. Sie ist in der That eine Cykloide. Die Gleichung einer solchen wird in den Lehrbüchern mit Hilfe einer dritten Variabelen $w$ in der Regel durch die Gleichungen $x = w - \sin w$ und $y = 1 - \cos w$ dargestellt. Elimination von $w$ giebt dort als Gleichung $x = \operatorname{arc}\cos(1-y) - \sqrt{1-(1-y)^2}$. Wegen der Drehung um $90^0$ ist hier $x$ und $y$ zu vertauschen, was

$$y = \operatorname{arc}\cos(1-x) - \sqrt{1-(1-x)^2}$$

giebt. Das Koordinatensystem ist aber gegen das unsrige um 1 verschoben. Setzt man $x = X + 1$, so wird die Gleichung

$$Y = \operatorname{arc}\cos X - \sqrt{1 - X^2}, \quad \text{oder} \quad X = \cos(Y + \sqrt{1 - X^2}),$$

was mit 6) bis auf das unwesentliche Wurzelzeichen (beide Zeichen sind richtig) übereinstimmt. Die Kurve $ABC$ ist also in der That eine Cykloide.

In gleicher Weise sind die übrigen Wellenlinien und Ovale gedehnte bezw. verschlungene Cykloiden. Die Gleichung der letzteren wird in der Regel durch

$$x = w - c \sin w$$
$$y = 1 - c \cos w$$

dargestellt. Elimination von $w$ ergiebt als Gleichung

$$x = \operatorname{arc}\cos\frac{1-y}{c} - c\sqrt{1 - \left(\frac{1-y}{c}\right)^2}.$$

oder bei Vertauschung von $x$ und $y$

$$y = \operatorname{arc}\cos\frac{1-x}{c} - c\sqrt{1 - \left(\frac{1-x}{c}\right)^2}.$$

Setzt man $1 - x = X - a$, also $x = 1 + a - X$ ein, so wird die Gleichung

$$Y = \arccos \frac{X-a}{c} - c\sqrt{1 - \left(\frac{X-a}{c}\right)^2}.$$

Man hat nur noch $c = e^a$ zu setzen, um die Übereinstimmung mit Gleichung 3) bezw. 3*) herbeizuführen. Folglich: Sämtliche Niveaulinien sind gedehnte bezw. verschlungene Cykloiden, deren Rollkreis den Radius 1 hat, so dafs ihre Periode gleich $2\pi$ wird.

Hieraus ergiebt sich eine Fülle von geometrischen Beziehungen, auf die nicht näher eingegangen werden soll. Wir gehen vielmehr vor weiteren Untersuchungen zu physikalischen Deutungen über.

207) Hydrodynamische Deutung. Man denke sich einen überall gleich tiefen langsam fliefsenden Strom zwischen parallelen Molen weit in einen überall gleich tiefen See geleitet. Reibungs- und Beharrungsstörungen werden als nicht vorhanden angenommen, so dafs die Strombewegung etwa der verlangsamten des elektrischen Fluidums entspricht. Die Zeichnung stellt die Stromlinien und die Linien gleichen Geschwindigkeitspotentials dar. Die Geschwindigkeiten sind umgekehrt proportional den Dimensionen der Quadrate. An jeder Stelle der Molen herrscht innen eine gröfsere Geschwindigkeit, aufsen eine weit kleinere. Dem Innen- und Aufsenpunkte jeder Stelle entsprechen zwei getrennte Stellen der Grenzlinie des Streifens der $z$-Ebenen, die man durch einfaches Abzählen der Stromlinien bis zur Cykloide hin bestimmen kann. Man kann auch die betreffenden Niveaulinien bis zur logarithmischen Linie verfolgen und dann die Schnittpunkte auf die $X$-Achse projizieren, was ebenfalls die beiden Abscissen giebt. Dadurch hat man gewissermafsen eine graphische Lösungsmethode der transscendenten Gleichung

$$X = x + e^x \cos\pi \quad \text{oder} \quad X = x - e^x,$$

wobei $X$ gegeben, $x$ berechnet werden soll. Diese Methode ist ebenso genau wie die übliche arithmetische Annäherungsmethode, nach welcher man zur Auffindung des ersten Wertes zu schreiben hat

1) $$x_1 = X + e^{x_1} = X + e^{X + e^{x_1}} = X + e^{X + e^{X_1} + e^{x_1}} = \dots$$

Den zweiten Wert findet man mit Hilfe der Gleichung $e^{x_2} = -X + x_2$ oder

2) $$x_2 = \lg(-X + x_2) = \lg[-X + \lg(-X + x_2)]$$
$$= \lg\{-X + \lg[-X + \lg(-X + x_2)]\} = \cdots$$