Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

207) Hydrodynamische Deutung

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

Setzt man $1 - x = X - a$, also $x = 1 + a - X$ ein, so wird die Gleichung

$$Y = \arc\cos\frac{X-a}{c} - c\sqrt{1-\left(\frac{X-a}{c}\right)^2}.$$

Man hat nur noch $c = e^a$ zu setzen, um die Übereinstimmung mit Gleichung 3) bezw. 3*) herbeizuführen. Folglich: Sämtliche Niveaulinien sind gedehnte bezw. verschlungene Cykloiden, deren Rollkreis den Radius 1 hat, so dafs ihre Periode gleich 2π wird.

Hieraus ergiebt sich eine Fülle von geometrischen Beziehungen, auf die nicht näher eingegangen werden soll. Wir gehen vielmehr vor weiteren Untersuchungen zu physikalischen Deutungen über.

207) Hydrodynamische Deutung. Man denke sich einen überall gleich tiefen langsam fliefsenden Strom zwischen parallelen Molen weit in einen überall gleich tiefen See geleitet. Reibungs- und Beharrungsstörungen werden als nicht vorhanden angenommen, so dafs die Strombewegung etwa der verlangsamten des elektrischen Fluidums entspricht. Die Zeichnung stellt die Stromlinien und die Linien gleichen Geschwindigkeitspotentials dar. Die Geschwindigkeiten sind umgekehrt proportional den Dimensionen der Quadrate. An jeder Stelle der Molen herrscht innen eine gröfsere Geschwindigkeit, aufsen eine weit kleinere. Dem Innen- und Aufsenpunkte jeder Stelle entsprechen zwei getrennte Stellen der Grenzlinie des Streifens der z-Ebenen, die man durch einfaches Abzählen der Stromlinien bis zur Cykloide hin bestimmen kann. Man kann auch die betreffenden Niveaulinien bis zur logarithmischen Linie verfolgen und dann die Schnittpunkte aut die X-Achse projizieren, was ebenfalls die beiden Abscissen giebt. Dadurch hat man gewissermafsen eine graphische Lösungsmethode der transscendenten Gleichung

$$X = x + e^x \cos\pi \quad \text{oder} \quad X = x - e^x,$$

wobei X gegeben, x berechnet werden soll. Diese Methode ist ebenso genau wie die übliche arithmetische Annäherungsmethode, nach welcher man zur Auffindung des ersten Wertes zu schreiben hat

1) $$x_1 = X + e^{x_1} = X + e^{X + e^{x_1}} = X + e^{X + e^{X_1} + e^{x_1}} = \dots$$

Den zweiten Wert findet man mit Hilfe der Gleichung $e^{x_2} = -X + x_2$ oder

2) $$x_2 = \lg(-X + x_2) = \lg[-X + \lg(-X + x_2)]$$
$$= \lg\{-X + \lg[-X + \lg(-X + x_2)]\} = \cdots$$

Damit ist zugleich die Frage nach der Umkehrung der Abbildung $Z = z + e^z$ beantwortet, bei der analoge Gleichungen, wie 1) und 2), jedoch für z aufzustellen sind. Sind Z_1 und Z_2, ebenso z_1 und z_2 unendlich benachbarte zusammengehörige Werte, so findet man für

$$\frac{Z_1 - Z_2}{z_1 - z_2} = \frac{(z_1 + e^{z_1}) - (z_2 + e^{z_2})}{z_1 - z_2} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_2} + \frac{e^{z_1} - e^{z_2}}{z_1 - z_2} = 1 + e^z$$

$$= 1 + e^{x+yi} = 1 + e^x(\cos y + i \sin y),$$

wo $z = x + yi$ der Mittelpunkt der unendlich benachbarten z_1 und z_2 ist. Statt $(Z_1 - Z_2) = (z_1 - z_2)(1 + e^z)$ kann man, wenn die Punkte Z_1 und Z_2 auf dem Molenrande liegen, schreiben

$$(X_1 + \pi i) - (X_2 + \pi i) = [(x_1 + \pi i) - (x_2 + \pi i)]$$
$$\cdot [1 + e^x(\cos \pi + i \sin \pi)],$$

oder einfacher

$$(X_1 - X_2) = (x_1 - x_2) \cdot [1 - e^x].$$

So erkennt man, dafs die kleine Molenstrecke $(X_1 - X_2)$ das $(1 - e^x)$fache der entsprechenden kleinen Strecke der Streifengrenze ist. Mit anderen Worten: Man hat das Vergröfserungsverhältnis $(1 - e^x)$ zwischen den an den Molo anstofsenden Quadraten und den zugehörigen des Streifens der z-Ebene gefunden.

Für $x = -\infty$ handelt es sich um $1 - \frac{1}{e^\infty} = 1$. D. h. je gröfser der negative Abstand vom Nullpunkte der z-Ebene ist, um so mehr stimmen die Quadrate in der Gröfse überein. Für $x = o$ ist das Vergröfserungsverhältnis das $(1 - e^o) = (1 - 1) = o$fache, d. h. an den kritischen Stellen A und B werden die Quadrate der Z-Ebene unendlich klein gegen die der z-Ebene. Auf der Aufsenseite nehmen dann nach links hin die Quadrate schnell zu, z. B. gilt für $x = 1$ der absolut zu nehmende Betrag des Ausdrucks $(1 - e^1)$ als Vergröfserungsverhältnis, so dafs es sich um das $(e^1 - 1) = 1{,}718\ldots$fache handelt, bei $x = 10$ um das $(e^{10} - 1)$fache, bei $x = \infty$ um das $(e^\infty - 1)$ oder ∞fache. Durch die reciproken Werte sind die Geschwindigkeiten bestimmt. An den Stellen A und B wird die Geschwindigkeit unendlich grofs, was bei gewöhnlichen Flüssigkeiten ohne ein Zerreifsen des Zusammenhangs nicht denkbar ist. Der Molo ist übrigens keine mathematische Linie, sondern ein Körper. Abrundung hebt diese Schwierigkeit auf. Für Helmholtz war die Bemerkung über die unendliche Geschwindigkeit der Anlafs, seine Theorie diskontinuierlicher Flüssigkeitsbewegungen und die der freien Ausflufsstrahlen im zweidimensionalen Raume anzubahnen, worin ihm dann Kirchhoff gefolgt ist.