



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

211) Beispiel zur Theorie der freien Ausflusstrahlen von Helmholtz und Kirchhoff

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77934](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77934)

wirkung des Thomsonschen Schutzringes zunächst für unendlich große Kondensatorplatten bezüglich der Festhaltung der Homogenität des zwischen den Platten liegenden Feldes. Die Deformationen der Geraden nehmen erst in größerer Entfernung rechts von der Unterbrechung wahrnehmbare Größe an. Vgl. Nr. 76.

210) Die Cylinder der logarithmischen und anderer Linien als Kondensatorplatten. Da nach obigem auf Linienstücke (bezw. Flächenstücke), deren Projektionen auf die X -Achse gleich lang sind, gleiche Belegungen kommen, so ist das entsprechende Problem als vollständig gelöst zu betrachten, sowohl für die beiden logarithmischen Linien, als auch für eine von ihnen und eine der drei Geraden der Figur. Auch das Influenzproblem zwischen Halbebene und ganzer Ebene (X -Achse) ist gelöst. Auch mit den übrigen Kurven kann man entsprechendes leisten.

Auf Wärme-, Elektrizitätsströmungen u. dgl. soll jetzt nicht eingegangen werden, auch nicht auf die nahe liegenden Vertauschungsprobleme bezw. die etwas unbequemer zu behandelnden Diagonalprobleme. Sämtliche Aufgaben bieten instruktives Übungsmaterial.

[211) Beispiel zur Theorie der freien Ausflusstrahlen von Helmholtz und Kirchhoff. Vorgeschrittenere Leser mögen ihre Kraft an einer ebenfalls elementar zu behandelnden Abbildungsaufgabe versuchen, von der nur die Resultate der Einzelrechnungen angegeben werden sollen. An dieser soll die neuere Theorie der freien Ausflusstrahlen erläutert werden.

Es sei wiederum $Z = X + Yi$ und $z = x + yi$. Die abbildende Funktion ist

$$1) \quad Z = 1 - e^{-z} - \sqrt{e^{-2z} - 1} + \arctan \sqrt{e^{-2z} - 1}.$$

Es soll untersucht werden, welches Flächengebiet der Z -Ebene einem unbegrenzten horizontalen Parallelstreifen der z -Ebene von der Breite π entspricht, z. B. dem von den Linien $y = 0$ und $y = \pi$ begrenzten, und zwar soll der negative (linke) Teil des Streifens zuerst, der positive (rechte) Teil zuletzt betrachtet werden.

Setzt man $y = 0$, so geht 1) über in

$$2) \quad X = 1 - e^{-x} - \sqrt{e^{-2x} - 1} + \arctan \sqrt{e^{-2x} - 1}.$$

Von $x = -\infty$ bis $x = 0$ bleibt der Ausdruck reell, so daß der imaginäre Teil von Z für diese Strecke

$$2*) \quad Y = 0$$

ist. Die Strecke von A über C bis $-\infty$ der z -Ebene entspricht also der Strecke von A über C bis $-\infty$ der Z -Ebene.

Wird aber x positiv, so treten in 2) imaginäre Teile auf. Dabei ist zu beachten, daß

$$\arctan ia = \frac{i}{2} \lg \frac{1+a}{1-a}$$

ist. Trennung der reellen und imaginären Teile giebt

$$3) \quad X = 1 - e^{-x}$$

$$3^*) \quad Y = \sqrt{1 - e^{-2x}} - \frac{1}{2} \lg \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2x}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-2x}}}$$

Durch 2, 2*) und 3, 3*) ist es möglich, für jeden Punkt der x -Achse in der z -Ebene die Koordinaten der entsprechenden Punkte der Z -Ebene zu finden. Der Strecke $-\infty, C, A, H, +\infty$ in der z -Ebene entspricht in der Z -Ebene die Gerade $-\infty, C, A$ und die Kurve AH u. s. w. Für $x = +\infty$ folgt aus 3) $X = 1, Y = -\infty$, so daß die Gerade $X = 1$ die senkrechte Asymptote der Kurve AH wird.

Setzt man dagegen $y = \pi$, so geht 1) über in

$$Z = 1 - e^{-(x+\pi i)} - \sqrt{e^{-2(x+\pi i)} - 1} + \arctan \sqrt{e^{-2(x+\pi i)} - 1}$$

oder

$$Z = 1 - e^{-x} (\cos \pi - i \sin \pi) - \sqrt{e^{-2x} (\cos 2\pi - i \sin 2\pi) - 1} + \arctan \sqrt{e^{-2x} (\cos 2\pi - i \sin 2\pi) - 1}.$$

Für die Strecke von o bis $-\infty$ giebt die Zerlegung in den reellen und imaginären Teil

$$4) \quad X = 1 + e^{-x} + \sqrt{e^{-2x} - 1} + \pi - \arctan \sqrt{e^{-2x} - 1},$$

$$4^*) \quad Y = o,$$

insbesondere entsprechen einander $x = -\infty$ und $X = +\infty$, $x = o$ und $X = 2 + \pi$.

Da jedoch für positives x die Wurzeln imaginär werden, so ist für solches eine andere Zerlegung gültig. Man erhält

$$5) \quad X = 1 + e^{-x} + \pi,$$

$$6) \quad Y = \sqrt{1 - e^{-2x}} - \frac{1}{2} \lg \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2x}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-2x}}},$$

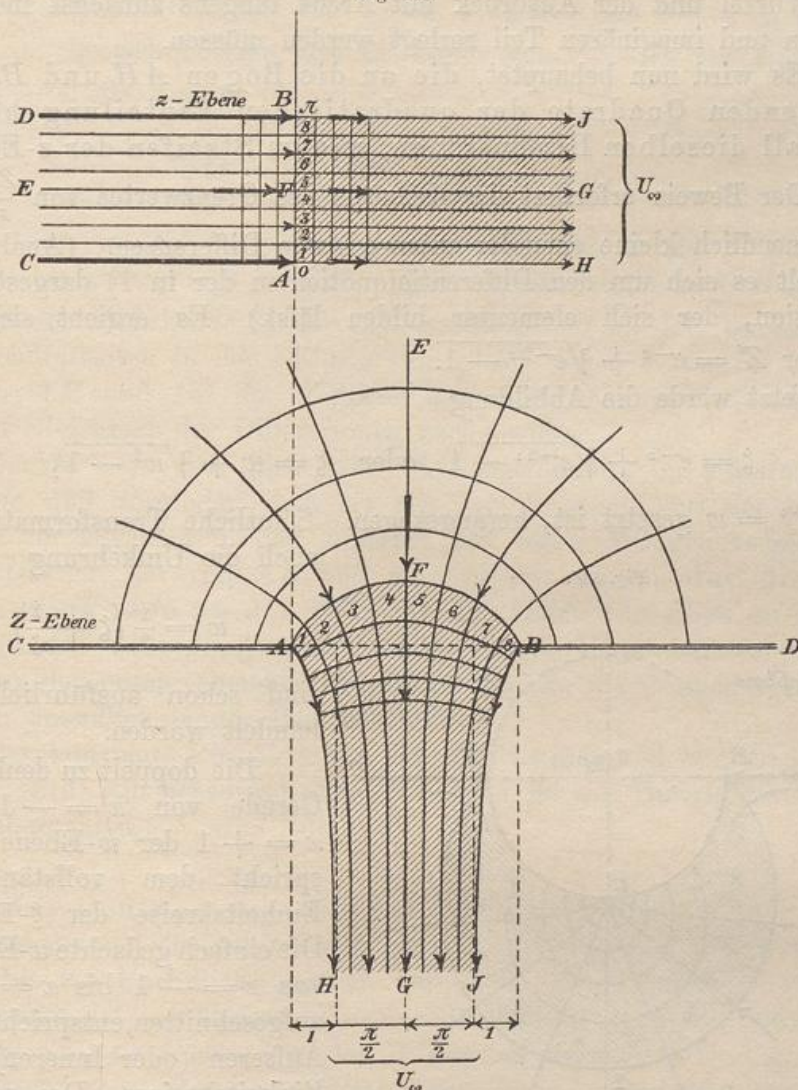
wobei wiederum die Formel für $\arctan ia$ Anwendung gefunden hat.

Der Geraden $y = \pi$ von $-\infty$ über D, B, J nach $+\infty$ entspricht also die X -Achse von $+\infty$ über D nach B , wo $X = 2 + \pi$

ist, dann kommt eine Kurve von B über J nach dem unendlichen Bereiche mit der Asymptote $X = 1 + \pi$.

Der symmetrisch teilenden Geraden $y = \frac{\pi}{2}$ entspricht die Symmetrieachse $X = 1 + \frac{\pi}{2}$. Fig. 145 erläutert diese Beziehungen in hinreichender Weise. Die linke Hälfte des Streifens der z -Ebene

Fig. 145.



entspricht der oberen Halbebene der Z -Ebene mit Ausschluss einer Fläche AFB , deren Grenze der Geraden $x = 0$ entspricht. Da für $x = 0$ Gleichung 1) in

$$Z = 1 - e^{-yi} - \sqrt{e^{-2yi} - 1} + \arctan \sqrt{e^{-2yi} - 1}$$

oder in

$$X + Yi = 1 - (\cos y - i \sin y) - \sqrt{(\cos 2y - i \sin 2y) - 1} \\ + \arctan \sqrt{(\cos 2y - i \sin 2y) - 1}$$

übergeht, so bestimmen sich die Koordinaten der Punkte jener Grenzkurven aus der Gleichsetzung der reellen und imaginären Teile, wobei die Wurzel und der Ausdruck mit Arcus tangens zunächst in einen reellen und imaginären Teil zerlegt werden müssen.

Es wird nun behauptet, die an die Bogen AH und BJ anstoßenden Quadrate der quadratischen Einteilung hätten überall dieselben Dimensionen, wie im Streifen der z -Ebene.

Der Beweis erfordert die Kenntnis des Grenzwertes von $\frac{Z_1 - Z_2}{z_1 - z_2}$ für unendlich kleine einander entsprechende Differenzen. (Analytisch handelt es sich um den Differentialquotienten der in 1) dargestellten Funktion, der sich elementar bilden läßt.) Es ergibt sich als solcher $Z' = e^{-z} + \sqrt{e^{-2z} - 1}$.

Jetzt werde die Abbildung

$$\xi = e^{-z} + \sqrt{e^{-2z} - 1} \quad \text{oder} \quad \xi = w + \sqrt{w^2 - 1},$$

wo $e^{-z} = w$ gesetzt ist, herangezogen. Sämtliche Transformationen, auch die Umkehrung

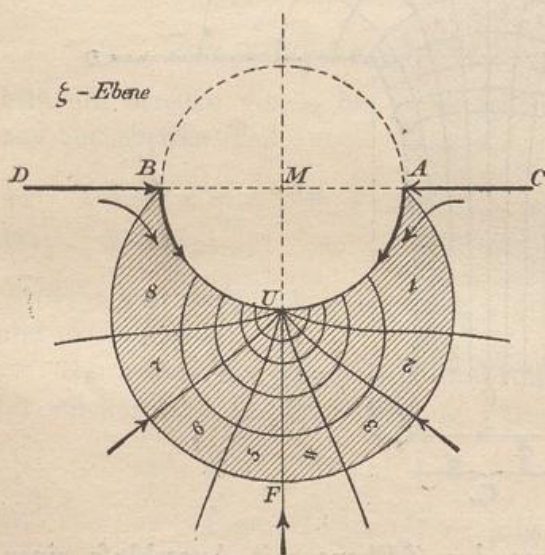
$$w = \frac{1}{2} \left(\xi + \frac{1}{\xi} \right)$$

sind schon ausführlich behandelt worden.

Die doppelt zu denkende Gerade von $x = -1$ bis $x = +1$ der w -Ebene entspricht dem vollständigen Einheitskreise der ξ -Ebene. Die einfach gedachte w -Ebene, von $x = -1$ bis $x = +1$ aufgeschnitten, entspricht dem Äußeren (oder Inneren) des Einheitskreises. Der ganzen X -Achse der w -Ebene entspricht die der ξ -Ebene, nur

ist der Einheitskreis an Stelle des Stückes von $X = -1$ bis $X = +1$ zu setzen. Dem Einheitskreise der w -Ebene entspricht ein durch $x = +1$ gehender Kreis der ξ -Ebene auf zweierlei Art. Uns

Fig. 146.



interessiert nur die in Fig. 146 hervorgehobene Sichel. Durch die Abbildung $w = e^{-z}$ geht die einfach gedachte w -Ebene in einen Parallelstreifen von der Breite 2π über, die Halbebene in den hier untersuchten Parallelstreifen von Breite π . Durch Buchstaben und Zahlen ist das gegenseitige Entsprechen der Z -Ebene, der z -Ebene und der ξ -Ebene hinreichend klargelegt, das Strömen ist durch Pfeile angedeutet.

Der absolute Betrag von $\xi = \xi + i\eta = \rho (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ ist gleich ρ . Bezeichnet man also die Länge von $Z_1 - Z_2$ als $\overline{Z_1 Z_2}$, die von $z_1 - z_2$ als $\overline{z_1 z_2}$, so ist

$$\frac{\overline{Z_1 Z_2}}{\overline{z_1 z_2}} = \rho \quad \text{oder} \quad \overline{Z_1 Z_2} = \rho \cdot \overline{z_1 z_2}.$$

(Vgl. Einf. in die isogonalen Verwandtschaften § 39.) Für den Einheitskreis ist aber $\rho = 1$, also ist für diesen und die entsprechenden Punkte der Grenzkurve in der Z -Ebene $\overline{Z_1 Z_2} = \overline{z_1 z_2}$, d. h. die Längen der Quadratseiten in der z -Ebene sind gleich denen der an die Grenzkurven AH und BJ der Z -Ebene stossenden Quadratseiten. Damit ist die Gleichheit der Dimensionen nachgewiesen.

Denkt man sich also eine Wasserströmung im Streifen der z -Ebene und vergleicht man sie mit der Strömung aus der oberen Hälfte der Z -Ebene in den zunächst mit festen Wänden versehenen Ausflußkanal, der von AH und BJ begrenzt ist, so sind die Geschwindigkeiten an den Wänden des letzteren eben so groß wie an der Streifengrenze. Dabei ist die Figur nur als Grundriffsfigur der entsprechenden Ebenen zu denken, die Öffnung AB also als ein unendlich langer Parallelschlitz.

Der konstante Charakter der Randgeschwindigkeit ist, wie § 212 zeigen wird, von hervorragender Bedeutung für die Theorie der freien Ausflußstrahlen.]

[212) Deutung des Problems im Helmholtzschen Sinne. Man denke sich in der z -Ebene parallele Wände DB und CA , die links bis ins Unendliche reichen und darin ein Strömung von links nach rechts in den übrigen wassererfüllten Raum. Ist die Bewegung langsam und sieht man von der Beharrung ab, so würde Fig. 144c maßgebend sein. Bei dieser Figur wurde darauf aufmerksam gemacht, daß an der Grenze des Ausflusses unendliche Geschwindigkeiten erforderlich sein würden, so daß dort der Zusammenhang der Flüssigkeit gestört werden müßte. Die Beobachtung zeigt daher auch ganz anderes. Der Strahl schießt zunächst kompakt in die ruhende Flüssigkeit des Gesamtraums hinein, um sich um so später und in um