Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

212) Deutung des Problems im Helmhotzschen Sinne

interessiert nur die in Fig. 146 hervorgehobene Sichel. Durch die Abbildung $w = e^{-z}$ geht die einfach gedachte w-Ebene in einen Parallelstreifen von der Breite 2π über, die Halbebene in den hier untersuchten Parallelstreifen von Breite π. Durch Buchstaben und Zahlen ist das gegenseitige Entsprechen der Z-Ebene, der z-Ebene und der ζ-Ebene hinreichend klargelegt, das Strömen ist durch Pfeile angedeutet.

Der absolute Betrag von $\zeta = \xi + i\eta = \varrho\,(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ ist gleich ϱ. Bezeichnet man also die Länge von $Z_1 - Z_2$ als $\overline{Z_1 Z_2}$, die von $z_1 - z_2$ als $\overline{z_1 z_2}$, so ist

$$\frac{\overline{Z_1 Z_2}}{\overline{z_1 z_2}} = \varrho \quad \text{oder} \quad \overline{Z_1 Z_2} = \varrho \cdot \overline{z_1 z_2}.$$

(Vgl. Einf. in die isogonalen Verwandtschaften § 39.) Für den Einheitskreis ist aber $\varrho = 1$, also ist für diesen und die entsprechenden Punkte der Grenzkurve in der Z-Ebene $\overline{Z_1 Z_2} = \overline{z_1 z_2}$, d. h. die Längen der Quadratseiten in der z-Ebene sind gleich denen der an die Grenzkurven AH und BJ der Z-Ebene stofsenden Quadratseiten. Damit ist die Gleichheit der Dimensionen nachgewiesen.

Denkt man sich also eine Wasserströmung im Streifen der z-Ebene und vergleicht man sie mit der Strömung aus der oberen Hälfte der Z-Ebene in den zunächst mit festen Wänden versehenen Ausflufskanal, der von AH und BJ begrenzt ist, so sind die Geschwindigkeiten an den Wänden des letzteren eben so grofs wie an der Streifengrenze. Dabei ist die Figur nur als Grundrifsfigur der entsprechenden Ebenen zu denken, die Öffnung AB also als ein unendlich langer Parallelschlitz.

Der konstante Charakter der Randgeschwindigkeit ist, wie § 212 zeigen wird, von hervorragender Bedeutung für die Theorie der freien Ausflufsstrahlen.]

[212) Deutung des Problems im Helmholtzschen Sinne. Man denke sich in der z-Ebene parallele Wände DB und CA, die links bis ins Unendliche reichen und darin ein Strömung von links nach rechts in den übrigen wassererfüllten Raum. Ist die Bewegung langsam und sieht man von der Beharrung ab, so würde Fig. 144c mafsgebend sein. Bei dieser Figur wurde darauf aufmerksam gemacht, dafs an der Grenze des Ausflusses unendliche Geschwindigkeiten erforderlich sein würden, so dafs dort der Zusammenhang der Flüssigkeit gestört werden müfste. Die Beobachtung zeigt daher auch ganz anderes. Der Strahl schiefst zunächst kompakt in die ruhende Flüssigkeit des Gesamtraums hinein, um sich um so später und in um so gröfserer Entfernung in Wirbeln aufzulösen, je gröfser die Geschwindigkeit ist. Man hat also dann auf eine längere Strecke bewegte und ruhende Flüssigkeit nebeneinander, beide durch scheinbar feste Wände begrenzt. Dazu ist aber nötig, dafs die Differenz zwischen v und O grofs genug ist, den Zusammenhang zwischen der ruhenden und bewegten Flüssigkeit aufzuheben bezw. unmöglich zu machen. Jetzt möge v gerade die Grenzgeschwindigkeit sein.

In der Z-Ebene handelt es sich dann um folgendes: Man denke sich zwei Gefäfse, die durch die Ebenen CA und BD begrenzt sind, so dafs aus dem oberen in das untere durch den Schlitz AB Wasser überströmen kann. Die Theorie verlangt, dafs den Strom- und Niveaulinien der z-Ebene solche der Z-Ebene entsprechen. Da aber der Zusammenhang zwischen der ruhenden und bewegten Flüssigkeit bei einer bestimmten Geschwindigkeit v aufgehoben wird, so mufs die Grenzlinie des Strahles so beschaffen sein, dafs sie erstens eine Stromlinie ist, die auf die ruhende Flüssigkeit keinen Druck ausübt, dafs zweitens die Geschwindigkeit in ihr überall gleich jenem v ist. Änderte sich nämlich in der die Grenze bildenden Kraftlinie die Geschwindigkeit, so würde eine Einengung oder Verbreiterung stattfinden wollen, was einen negativen oder positiven Druck auf die ruhende Flüssigkeit geben würde. — Die Abbildung $z = f(z)$ hat also so zu geschehen, dafs der absolute Betrag ϱ von $\frac{Z_2 - Z_1}{z_2 - z_1}$ gleich 1 ist. Dies war im obigen Beispiele der Fall. Jene Aufgabe ist also als gelöst zu betrachten. Wichtig ist bei dieser Theorie, dafs man das wirkliche Mafs der Kontraktion des Strahles erhält.]

[213) Andere Beispiele freier Ausflufsstrahlen. Gelingt es, einen unbegrenzten Parallelstreifen so auf eine Fläche eindeutig abzubilden, dafs ein Teil der Begrenzung der letzteren in den Dimensionen der anstofsenden Quadrate mit denen der Quadrate des Streifens übereinstimmt, so ist im allgemeinen ein Problem für freie Ausflufsstrahlen gelöst. (In der Sprache der Analysis würde die Methode folgendermafsen zu charakterisieren sein: Man bildet den Streifen der z-Ebene eindeutig auf eine Fläche der ζ-Ebene ab, zu deren Grenzen ein Stück des Einheitskreises gehört. Darauf sucht man das Integral Z der Funktion $\zeta = f(z)$. Die Funktion Z löst dann das Problem.) In der 22. Vorlesung von Kirchhoffs Mechanik findet man mehrere Beispiele. Hat z. B. ein sehr tiefes Gefäfs einen der Fig. 147 entsprechenden Ausflufsschlitz, der weit höher liegt, als der Boden, so geschieht der Ausflufs nicht direkt an den inneren Wänden,