Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

213) Andere Beispiele freier Ausflussstrahlen

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

so gröfserer Entfernung in Wirbeln aufzulösen, je gröfser die Geschwindigkeit ist. Man hat also dann auf eine längere Strecke bewegte und ruhende Flüssigkeit nebeneinander, beide durch scheinbar feste Wände begrenzt. Dazu ist aber nötig, dafs die Differenz zwischen v und O grofs genug ist, den Zusammenhang zwischen der ruhenden und bewegten Flüssigkeit aufzuheben bezw. unmöglich zu machen. Jetzt möge v gerade die Grenzgeschwindigkeit sein.

In der Z-Ebene handelt es sich dann um folgendes: Man denke sich zwei Gefäfse, die durch die Ebenen CA und BD begrenzt sind, so dafs aus dem oberen in das untere durch den Schlitz AB Wasser überströmen kann. Die Theorie verlangt, dafs den Strom- und Niveaulinien der z-Ebene solche der Z-Ebene entsprechen. Da aber der Zusammenhang zwischen der ruhenden und bewegten Flüssigkeit bei einer bestimmten Geschwindigkeit v aufgehoben wird, so mufs die Grenzlinie des Strahles so beschaffen sein, dafs sie erstens eine Stromlinie ist, die auf die ruhende Flüssigkeit keinen Druck ausübt, dafs zweitens die Geschwindigkeit in ihr überall gleich jenem v ist. Änderte sich nämlich in der die Grenze bildenden Kraftlinie die Geschwindigkeit, so würde eine Einengung oder Verbreiterung stattfinden wollen, was einen negativen oder positiven Druck auf die ruhende Flüssigkeit geben würde. — Die Abbildung $z = f(z)$ hat also so zu geschehen, dafs der absolute Betrag ϱ von $\frac{Z_2 - Z_1}{z_2 - z_1}$ gleich 1 ist. Dies war im obigen Beispiele der Fall. Jene Aufgabe ist also als gelöst zu betrachten. Wichtig ist bei dieser Theorie, dafs man das wirkliche Mafs der Kontraktion des Strahles erhält.]

[213) Andere Beispiele freier Ausflufsstrahlen. Gelingt es, einen unbegrenzten Parallelstreifen so auf eine Fläche eindeutig abzubilden, dafs ein Teil der Begrenzung der letzteren in den Dimensionen der anstofsenden Quadrate mit denen der Quadrate des Streifens übereinstimmt, so ist im allgemeinen ein Problem für freie Ausflufsstrahlen gelöst. (In der Sprache der Analysis würde die Methode folgendermafsen zu charakterisieren sein: Man bildet den Streifen der z-Ebene eindeutig auf eine Fläche der ζ-Ebene ab, zu deren Grenzen ein Stück des Einheitskreises gehört. Darauf sucht man das Integral Z der Funktion $\zeta = f(z)$. Die Funktion Z löst dann das Problem.) In der 22. Vorlesung von Kirchhoffs Mechanik findet man mehrere Beispiele. Hat z. B. ein sehr tiefes Gefäfs einen der Fig. 147 entsprechenden Ausflufsschlitz, der weit höher liegt, als der Boden, so geschieht der Ausflufs nicht direkt an den inneren Wänden, sondern so, dafs die gezeichneten Kurven die freien Grenzen sind. Der schräg schraffierte Raum kann ruhende Flüssigkeit enthalten. Die lösende Funktion

$$Z = -i(e^{-2z} + z - 1 + e^{-z}\sqrt{e^{-2z} - 1} - \lg(e^{-z} + \sqrt{e^{-2z} - 1})$$

ist von Helmholtz als erstes Beispiel für diese Theorie bestimmt worden. Liegen die Grenzen (Fig. 148) nicht in gleicher Höhe, so

Fig. 147.

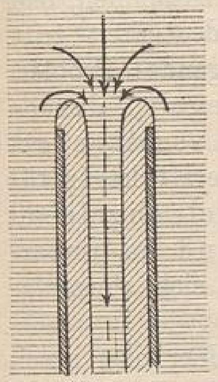


Fig. 148.

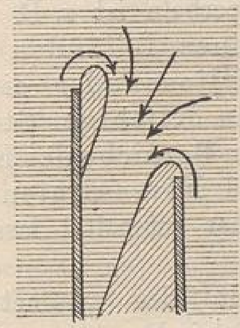
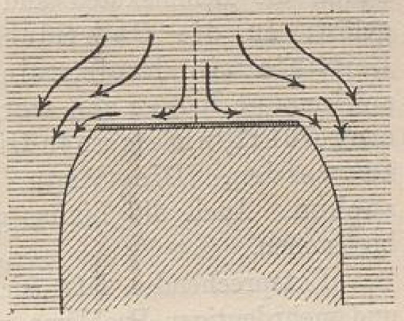


Fig. 149.



wird die Mittellinie des Strahles schräg, so dafs er gegen die Wand anschlägt, was Störungen verursacht. Wird das Ausströmen durch eine in Fig. 149 dargestellte Platte gehemmt, so sind die dort gezeichneten die Grenzen der Ausströmung. Die abbildende Funktion ist

$$Z = 2\sqrt{z} + z\sqrt{\frac{1}{z} - 1} + \arcsin\sqrt{z}.$$

Die physikalischen Annahmen dieser Theorie sind am ausführlichsten in der Helmholtzschen Abhandlung über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen vom 23. April 1868 dargestellt, die in seine gesammelten Werke aufgenommen ist.

Die Besprechung der Theorie ist hier erfolgt, um irrtümliche Deutungen der früheren Betrachtungen zu vermeiden.]

214) Übertragungen auf krumme Oberflächen. Gelingt es, eine gekrümmte Oberfläche in ein quadratisches Netz einzuteilen, so läfst sich jede der beiden Kurvengruppen als ein System von Stromlinien für gewisse Probleme stationärer Strömung betrachten. Dasselbe gilt von den Diagonalkurven des Netzes. Wie in der Ebene, so sind auch auf jeder Oberfläche unendlich viele Probleme durchführbar. Wie die Probleme der Ebene in gegenseitigen Beziehungen stehen, die durch Abbildung mittels Funktionen komplexen Arguments