Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

214) Übertragungen der Isothermenscharen auf krumme Oberflächen

sondern so, dafs die gezeichneten Kurven die freien Grenzen sind. Der schräg schraffierte Raum kann ruhende Flüssigkeit enthalten. Die lösende Funktion

$$Z = -i\left(e^{-2z} + z - 1 + e^{-z}\sqrt{e^{-2z}-1} - \lg\left(e^{-z} + \sqrt{e^{-2z}-1}\right)\right)$$

ist von Helmholtz als erstes Beispiel für diese Theorie bestimmt worden. Liegen die Grenzen (Fig. 148) nicht in gleicher Höhe, so

Fig. 147.

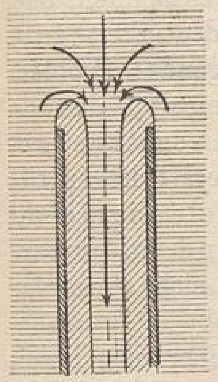


Fig. 148.

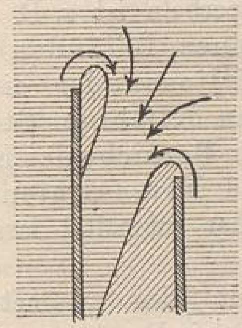
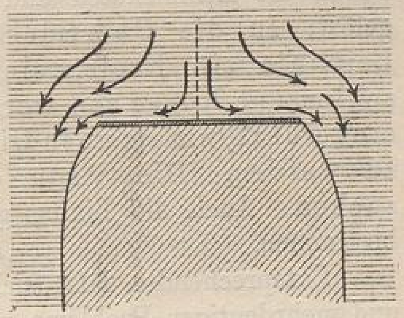


Fig. 149.



wird die Mittellinie des Strahles schräg, so dafs er gegen die Wand anschlägt, was Störungen verursacht. Wird das Ausströmen durch eine in Fig. 149 dargestellte Platte gehemmt, so sind die dort gezeichneten die Grenzen der Ausströmung. Die abbildende Funktion ist

$$Z = 2\sqrt{z} + z\sqrt{\frac{1}{z} - 1} + \arcsin\sqrt{z}.$$

Die physikalischen Annahmen dieser Theorie sind am ausführlichsten in der Helmholtzschen Abhandlung über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen vom 23. April 1868 dargestellt, die in seine gesammelten Werke aufgenommen ist.

Die Besprechung der Theorie ist hier erfolgt, um irrtümliche Deutungen der früheren Betrachtungen zu vermeiden.]

214) Übertragungen auf krumme Oberflächen. Gelingt es, eine gekrümmte Oberfläche in ein quadratisches Netz einzuteilen, so läfst sich jede der beiden Kurvengruppen als ein System von Stromlinien für gewisse Probleme stationärer Strömung betrachten. Dasselbe gilt von den Diagonalkurven des Netzes. Wie in der Ebene, so sind auch auf jeder Oberfläche unendlich viele Probleme durchführbar. Wie die Probleme der Ebene in gegenseitigen Beziehungen stehen, die durch Abbildung mittels Funktionen komplexen Arguments

wiedergegeben werden können, so stehen auch die verschiedenen Probleme auf derselben Oberfläche, ebenso die für verschiedene Oberflächen möglichen in gegenseitigen Beziehungen.

a) Abwickelbare Flächen. Jeder Sektor der Ebene läfst sich durch entsprechende Krümmung in einen geschlossenen Kegel verwandeln. Man rolle z. B. die Halbebene des symmetrischen Zweipunktproblems so zum Kegel zusammen, dafs der Mittelpunkt der lemniskatischen Kurven zur Spitze des Kegels wird. Die Hälften der in der Ebene vollständigen Kurven schliefsen sich so zusammen, dafs Eindeutigkeit an Stelle der ursprünglichen Zweideutigkeit tritt. Durch die Lemniskaten und Hyperbeln ist z. B. folgendes Problem gelöst: In die Oberfläche eines leitenden Kegels, dessen Leitlinie ein Kreis, eine Ellipse oder eine sonstige geschlossene Kurve sei, werde an beliebiger Stelle Elektrizität eingeführt, um im unendlichen Bereiche des Kegels abgeleitet zu werden. Die Strom- und Niveaulinien sind zu untersuchen. Auch die Linien gleicher Intensität lassen sich elementar bestimmen.

Entsprechendes läfst sich mit jedem symmetrischen oder zwei- und mehrdeutigen Probleme symmetrischer Art machen, z. B. auch mit den konfokalen Ellipsen und Hyperbeln. Zahlreiche der schon behandelten Figuren geben instruktive Modelle für das Verständnis der Strömungen auf krummen Oberflächen.

Ähnlich kann man mit den abwickelbaren Regelflächen verfahren. Gewisse Schraubenflächen gehören hierher. Das einfachste Beispiel ist naturgemäfs der Cylinder, dessen quadratische Oberflächeneinteilung benutzt werden kann, Scharen von Schraubenlinien herzustellen, die ihn ebenfalls in Quadrate einteilen. Dagegen treten die Probleme, die sich auf nicht abwickelbare Regelflächen beziehen, z. B. auf das einmantelige Hyperboloid und hyperbolische Paraboloid, aus der elementaren Behandlungsweise heraus.

b) Die Kugel. Projiziert man die Kugelfläche von einem ihrer Punkte aus auf die gegenüberliegende Tangentialebene, so geht bekanntlich jeder Kreis ihrer Oberfläche im allgemeinen in einen Kreis über. Zwei sich schneidende Kreise verwandeln sich dabei in Kreise, die sich unter demselben Winkel schneiden. Die Abbildung ist also eine isogonale, so dafs kleine Dreiecke der Kugelfläche in ähnliche Dreiecke auf der Tangentialebene übergehen. In manchen Lehrbüchern der Elementarmathematik, z. B. im Method. Lehrbuch Bd. II des Verfassers Stereom. IX werden diese Sätze auf einfachem Wege abgeleitet. Für die Rückprojektion der Tangentialebene auf die Kugel mit Hilfe des Antipodenpunktes gilt dasselbe. Jede quadratische Einteilung der Ebene giebt also eine solche auf der Kugel, und durch Inversion kann die letztere wieder in eine andere Kugelteilung umgeformt werden. Solche Einteilungen geben z. B. die Meridiane und Parallelkreise und ihre Diagonalkurven, die loxodromischen Linien, die bei der obigen Projektion in logarithmische Spiralen übergehen. Ähnliches gilt vom Kreisbüschel auf der Kugelfläche bei beliebig liegenden Büschelpunkten. (Auch die sphärischen Kegelschnitte machen eine Quadrateinteilung möglich, die jedoch auf elliptische Funktionen führt. Sie vermitteln die Abbildung der Kugelfläche auf Quadrat und Rechteck. Vgl. Ing.-Math. S. 199: Quadratische Weltkarte von Peirce.)

c) Drehungsflächen. Jede Drehungsfläche kann durch Meridiane und Parallelkreise quadratisch eingeteilt werden, z. B. das Drehungsellipsoid, Drehungsparaboloid, Drehungshyperboloid und verschiedene Ringflächen. Dasselbe gilt von gewissen Kanalflächen und den durch Reciprozität aus ihnen entstandenen. Manches läfst sich elementar durchführen. Vergl. die Abhandlung des Verfassers über die Abbildung der Cyklide in Bd. 94 des Crell. Journals, ebenso die über einige Aufgaben der darstellenden Geometrie im Progr. 1883 der Hagener Gewerbeschule und im 14. Jahrg. der Zeitschr. für math. Unterricht. Endlich noch die Abhandl. über gewisse transscendente Flächen, welche die Cyklide als besonderen Fall enthalten im 94. Bande des Crell. Journals.

d) Schwieriger sind die allgemeinen Flächen zweiten Grades zu behandeln, noch mehr Schwierigkeiten bieten die höheren Grade. Auch die Oberflächen von Polyedern, besonders von regelmäfsigen, geben zu interessanten Aufgaben Anlafs.

Beispiele aus diesem Gebiete sollen nicht gegeben werden, da sie nur theoretischen Wert haben und in der Ingenieur-Wissenschaft kaum Anwendung finden. Mit diesen Bemerkungen soll das Kapitel von den zweidimensionalen Problemen abgeschlossen werden.
