Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

Kapitel XI. Physikalisches über galvanische Ströme und ihr Potential.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

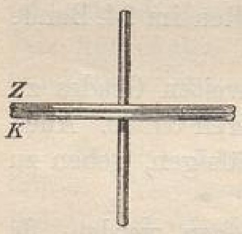
Kapitel XI.

Physikalisches über galvanische Ströme und ihr Potential.

215) Spannungsreihe der Leiter erster Klasse.

Wir haben bisher die elektrischen Strömungen in Raum und Ebene untersucht, ohne auf ihr Wesen einzugehen. Man lese in den physikalischen Lehrbüchern nach, was dort über die Fundamentalversuche Voltas gesagt ist. Es sei K eine Kupferscheibe, Z eine Zinkscheibe, jede mit einem isolierenden Glasstabe versehen, so dafs man sie handhaben kann, ohne Elektrizität abzuleiten. Berühren sich beide Platten, und hebt man sie dann parallel voneinander ab, so läfst sich mit Hilfe eines Elektroskops zeigen, dafs die Kupferplatte schwach negativ, die Zinkplatte schwach positiv geladen ist, und zwar sind beide Ladungen gleich grofs.

Fig. 150.



Ähnliches wies Volta auch von anderen Metallen nach, und er stellte folgende Spannungsreihe auf

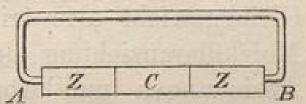
$$+ \mid \text{Zink, Blei, Zinn, Eisen, Kupfer, Silber} \mid -$$
$$5 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 1$$

Hier bedeuten die Zahlen, dafs wenn man die Versuche mit Platten von gleicher Gröfse anstellt und die bei Blei und Zinn gemessene elektrische Menge gleich 1 setzt, bei Berührung der übrigen Metalle untereinander die den beigeschriebenen Zahlen entsprechenden Mengen entstehen. Zweitens wies Volta nach, dafs Zink und Zinn auf die Menge $5 + 1 = 6$, Zink und Eisen auf $5 + 1 + 3 = 9$, Zink und Kupfer auf $5 + 1 + 3 + 2 = 11$, Zink und Silber auf $5 + 1 + 3 + 2 + 1 = 12$, Blei und Eisen auf $1 + 3 = 4$, Blei und Kupfer auf $1 + 3 + 2 = 6$ u. s. w. führen. Das links stehende Metall ist dabei stets positiv, das rechts stehende negativ geladen. Man kann das Gesetz als das Voltasche Additionsgesetz bezeichnen.

In neuerer Zeit hat man die Spannungsreihe ergänzt und die Verhältniszahlen genauer bestimmt. Insbesondere ist auch das obige Additionsgesetz bestätigt worden.

Man hat anzunehmen, dafs zwischen den Metallen im Momente der Berührung eine Potentialdifferenz auftritt, die ein Überströmen geringer Elektrizitätsmengen veranlafst. Diese Mengen sind proportional der Potentialdifferenz. Bezeichnet man die zwischen Zink und Kohle entstehende mit $Z \mid C$, die zwischen Kohle und Platin entstehende mit $C \mid Pl$, die zwischen Zink und Platin entstehende mit $Z \mid Pl$, so ist nach obigem

Fig. 151.



$$1) \quad Z \mid C + C \mid Pl = Z \mid Pl \quad \text{oder} \quad (V_z - V_c) + (V_c - V_p) = V_z - V_p.$$

Verbindet man das Platin mit einem Zinkdraht, der zum Zink zurückführt, so entsteht zwischen Zink und Zink die Potentialdifferenz

$$2) \qquad Z \mid C + C \mid Pl + Pl \mid Z$$

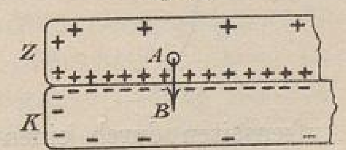
oder nach 1)

$$Z \mid C + C \mid Pl - (Z \mid C + C \mid Pl) = 0,$$

d. h. durch den Draht findet von B nach A hin kein Überströmen von Elektrizität statt. Indem man (in nicht geschickter Weise) die Potentialdifferenz als elektromotorische Kraft bezeichnet, kann man sagen, die elektromotorische Kraft der geschlossenen Metallkette sei gleich Null.

216) Deutung des Versuchs von Volta. Nach Helmholtz hat man anzunehmen, dafs z. B. Kupfer auf unmefsbar kleine Entfernung hin auf die beiden in der Grenzschicht des Zink enthaltenen Elektrizitäten dadurch scheidend einwirkt, dafs es die negative zu sich herüber zieht, weil sie diese stärker anzieht, als die andere Elektrizität. Ist AB gleich l diese unmefsbare Entfernung, so ist die scheidende Anziehungskraft $p = \frac{V_1 - V_2}{l}$, wenn V_1 und V_2 die Potentialwerte bei A und B für die Anziehung des Kupfers auf die benachbarte negativ elektrische Einheit sind. Ebenso wirkt das Zink auf die benachbarte positive Elektrizität in Kupfer anziehend ein. Diese Scheidung dauert so lange fort, bis die auf jedes elektrische Teilchen

Fig. 152.



wirkenden elektrischen Anziehungen und Abstofsungen eine Resultante geben, die der Anziehungskraft p des Metalls entgegengesetzt gleich ist. Ist also M_1 das Potential sämtlicher elektrischer Massen auf die negative Einheit in A, M_2 der Potentialwert in B, so mufs beim Gleichgewicht $\frac{M_1 - M_2}{l} = -p$ sein, d. h. $\frac{V_1 - V_2}{l} + \frac{M_1 - M_2}{l} = 0$ oder auch

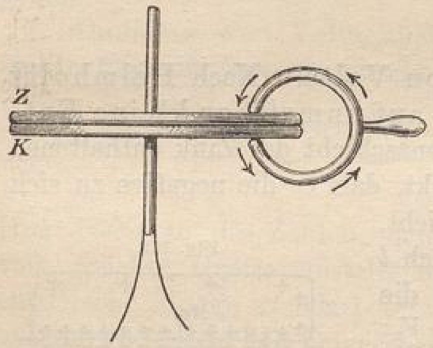
$$(V_1 - V_2) + (M_1 - M_2) = 0.$$

Gleichgewicht also tritt ein, sobald die Potentialdifferenzen für jene Molekularanziehung der Metalle einerseits und für die elektrischen Anziehungen und Abstofsungen andererseits entgegengesetzt gleich sind. Welche von beiden Differenzen man untersucht, ist gleichgültig.

Die Anordnung der übergeströmten Elektrizitätsteilchen entspricht etwa der, die man nach Nr. 75 bezw. Fig. 144c an zwei Kondensatorplatten beobachtet. Diese sind auf der Berührungsfläche und an den Rändern mit Schellack zu überstreichen und an den Aufsenseiten frei zu lassen. Die sich bindenden Elektrizitäten verbreiten sich über die gesamte Oberfläche der beiden Platten, jedoch ist auf der Aufsenseite nur ein verschwindend kleiner Teil vorhanden. Ähnlich ist die Verteilung auch hier. Die besprochenen Molekularanziehungen der Metalle sind es, die dem Wiedervereinigen entgegenstehen, sie übernehmen also gewissermafsen die Rolle der isolierenden Schellackschicht.

Besonders die Versuche, die Kohlrausch mit seinem Kondensator angestellt hat, haben das Additionsgesetz bestätigt und die Verhältniszahlen der Spannungsreihe genauer festgestellt. Die Platten wurden aus den zu untersuchenden Metallen hergestellt, oder es wurden, da es nur auf die Oberflächen ankommt, Messingplatten galvanisch mit den zu untersuchenden Metallen überzogen. Um diese Platten direkt als Kondensatoren benutzen zu können, wurden Innenseite und Rand mit jener Schellackschicht überzogen. Da die Gröfse und Lage der Berührungsfläche sich als gleichgültig erwies, wurden die vom Schellack freien Aufsenseiten durch einen Metalldraht (an isolierendem Stäbchen befestigt), der aus einem der beiden Metalle hergestellt war, in leitende Berührung gebracht. Augenblicklich erfolgte das Überströmen der Elektrizitäten und ihre oben besprochene Anordnung. Die Potentialdifferenz ergab sich als unabhängig davon, ob man der einen Platte

Fig. 153.



vorher ein besonderes Potential gab. So konnte man z. B. die eine Platte ableitend mit der Erde verbinden, dann wurde das Potential der anderen gleich der Differenz selbst, denn die erstere hatte das Potential Null. Mit Hilfe der früher entwickelten Formel

$$V = M_1 - M_2 = 4\pi\delta d,$$

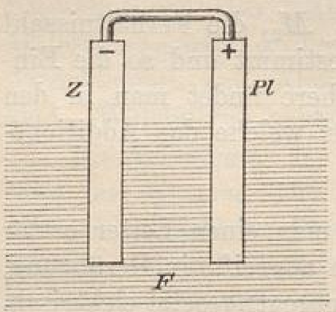
wo $\delta = \frac{E}{F}$ die Dichtigkeit, d die Dicke der Isolierschicht ist, wurde nun die Differenz $V = M_1 - M_2$ aus der am Elektrometer zu messenden Elektrizitätsmenge E bestimmt und damit $M_1 | M_2$, die Verhältniszahl der Spannungsreihe für die beiden Metalle, bestimmt und so die Einschaltung in die Reihe ermöglicht. Das Nähere findet man in den Lehrbüchern, z. B. bei Wüllner. Leiter, für welche das Additionsgesetz gilt, heifsen Leiter erster Klasse.

217) Leiter zweiter Klasse. Bringt man einen Leiter erster Klasse mit einer Flüssigkeit, die ihn chemisch angreift, in Berührung, so wird der Leiter elektrisch, die Flüssigkeit entgegengesetzt elektrisch. Um dies zu zeigen, lege man z. B. auf die mit Schellack überzogene Kupferplatte des Kondensators eine ebenso gefirniste Glasplatte, breite auf dieser die zu untersuchende Flüssigkeit aus und bringe Flüssigkeit und Kupfer mittels eines Kupferdrahtes (an Isolierstab) in leitende Verbindung. Beide werden elektrisch. Die Scheidung hört auf, sobald die abstofsenden und anziehenden Wirkungen der geschiedenen Elektrizitäten die Fortsetzung unmöglich machen. Würde man dagegen die geschiedenen Elektrizitäten entfernen, so würde die Scheidung von neuem beginnen.

Taucht man isoliertes Zink in verdünnte Schwefelsäure, so erscheint es selbst negativ, die Flüssigkeit aber positiv elektrisch, zugleich ist folgendes vor sich gegangen. Nach neueren Annahmen befinden sich die Moleküle der Schwefelsäure SO_4H_2 schon durch die Verdünnung im Zustande der Dissociation, so dafs die Trennung auch durch sehr schwache Kräfte ermöglicht werden kann. Das SO_4 verbindet sich mit dem Zink zu elektrisch neutralem Zinkvitriol SO_4Zn. Vereinzelte Wasserstoffbläschen bleiben am Zink hängen. Es ist so, als ob SO_4 negativ elektrisch geladen wäre, und als ob seine Elektrizität bei der chemischen Vereinigung frei auf das Zink übergegangen wäre. Dem H_2 würde also eine positive Ladung zuzuschreiben sein. Der elektrische Vorgang hört auf, sobald die negative Ladung des Zink die weitere Anziehung von SO_4 hindert. Entfernt man aber die freie negative Elektrizität vom Zink, so kann der chemische Vorgang wieder beginnen.

Bringt man Zink und Platin, beide zunächst isoliert, in verdünnte Schwefelsäure, so geschieht am Zink dasselbe wie vorher, am chemisch fast gar nicht angegriffenen Platin zunächst fast nichts. Verbindet man das Platin durch einen Zinkdraht mit dem Zink, so hört die chemische Aktion am Zink nicht wie vorher auf, sondern sie wird fortgesetzt, die negative Elektrizität des Zink strömt also nach dem Platin hin und hemmt nicht mehr die Zersetzung der Schwefelsäure, zugleich strömt dauernd positive Elektrizität vom Platin zum Zink. Es entsteht also ein dauernder elektrischer Strom. Seine Richtung bestimmt man auf Grund geschehener Einigung nach dem Sinne der Wanderung der positiven Elektrizität. Das freie Ende des Platin, wo der Strom in den Draht eintritt, heifst der positive Pol, das des Zinks der negative Pol.

Fig. 154.



Da eine dauernde Bewegung stattfindet, besteht zwischen den Polen eine Potentialdifferenz, die verschieden von Null ist. Die Flüssigkeiten enthaltenden Ketten erhalten also nicht, wie die früher besprochenen, als Summe der Potentialdifferenzen den Wert Null, sondern einen andern Wert. Demnach mufs das Additionsgesetz für Flüssigkeiten ungültig sein.

Handelt es sich z. B. um Zink, Kupfer und verdünnte Schwefelsäure, so ist

$$V_z - V_f = Z \mid F$$
$$V_f - V_k = F \mid K$$

also durch Addition $\quad V_z - V_k = Z \mid F + F \mid K.$

Wäre nun

$$Z \mid F + F \mid K = Z \mid K,$$

so würde

$$Z \mid F + F \mid K + K \mid Z = 0$$

sein, d. h. der Schlufs der Kette durch Kupferdraht müfste die Potentialdifferenz Null geben. Sie ist aber, da ein Strom entsteht, verschieden von Null, also mufs $Z \mid F + F \mid K$ verschieden von $Z \mid K$ sein, d. h. das Additionsgesetz darf hier nicht angewandt werden.

Man bezeichnet daher die festen Leiter (Quecksilber ist allerdings eingeschlossen) als Leiter erster Ordnung, die Flüssigkeiten als solche zweiter Ordnung. Die dissoziierten Moleküle der Flüssigkeit denkt man sich polarisiert und so gerichtet, dafs z. B. das SO_4 dem Zink, das H_2 dem Platin bezw. Kupfer zugekehrt ist. Wird einem Moleküle durch das Zink sein SO_4 entzogen, so verbindet sich das frei gewordene H_2 mit dem SO_4 des benachbarten Moleküls, dessen frei werdendes H_2 mit dem SO_4 des folgenden, bis endlich am andern Metall ein H_2 frei wird. Nur handelt es sich dabei nicht um chemische Verbindung und Trennung, sondern nur um physikalisches Umlagern. Die Flüssigkeitsmoleküle bilden gewissermaſsen Ketten, deren Mittellinien den Kraftlinien folgen. In diesen Richtungen erfolgt ein unaufhörliches Auswechseln der chemischen Bestandteile.

Die zwischen den Polen bestehen bleibende Potentialdifferenz giebt die Arbeit an, die nötig sein würde, die Einheit der positiven oder negativen Elektrizität ihrer Strömungsrichtung entgegen, d. h. gegen die wirksamen Anziehungen bezw. Abstoſsungen, vom andern Pole zum ursprünglichen zurückzubringen. Sie ist ebenso groſs, wie die Arbeit, die nötig ist, die elektrische Einheit durch die Widerstände des Schlieſsungsbogens hindurchzuführen. Man bezeichnet sie als die elektromotorische Kraft der Kette.

Setzt man z. B. Zink | Kupfer = 100, so ergiebt sich nach Kohlrausch für die zu nennenden Flüssigkeiten

Zink | Zinkvitriol = — 129, Zink | Schwefelsäure = — 115,
Kupfer | Schwefelsäure = — 40,25,
Kupfer | Zinkvitriol = — 36, Kupfer | Kupfervitriol = — 21,5,
Amalgamiertes Zink | Schwefelsäure = — 149,
Platin | Salpetersäure = — 149.

Demnach giebt z. B. die Kette Zink-Zinkvitriol-Kupfer beim Schluſs durch einen Kupferdraht folgendes:

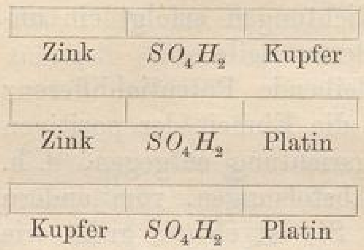
	Zink-Zinkvitriol	= — 129
	Zinkvitriol-Kupfer	= + 36
	Kupfer-Zink	= — 100
zwischen	Zink und Zink	= — 193 = $V_z - V_{z_1}$.

[Dagegen hätte die Kette Zink, Blei, Kupfer nach Voltas Zahlen gegeben Zink | Blei = 5, Blei | Kupfer = 6, Kupfer | Zink = — 11, also Summe gleich Null, d. h. $V_z - V_{z_1} = 0$.] So erkennt man, daſs die Flüssigkeiten sich nicht in die frühere Spannungsreihe einpassen lassen. In dieser Eigenschaft liegt die Möglichkeit der Erzeugung galvanischer Ströme.

Man kann auch Ketten mit mehreren Flüssigkeiten bilden, wobei die letzteren durch poröse Thoncylinder voneinander zu trennen sind. In jede der Flüssigkeiten wird dann ein Leiter erster Klasse gestellt. Hierher gehören das Daniellsche und das Grovesche Element. Darüber vergleiche man die Lehrbücher. — Nennt man die durch Addition gewonnene Zahl die Schluſszahl der Kette (z. B. — 193), so kann man sagen: Die Stromstärke ist proportional der Schluſszahl.

218) Vergleichung von Ketten mit derselben Flüssigkeit. Man kombiniere zunächst Zink und Kupfer, dann Zink und Platin, endlich Kupfer und Platin mit verdünnter Schwefelsäure zur Kette. Dann ist die Potentialdifferenz der ersten Kette, wenn F die Flüssigkeit bedeutet

Fig. 155.



1) Zink | $F + F$ | Kupfer + Kupfer | Zink,

die der zweiten

2) Zink | $F + F$ | Platin + Platin | Zink,

die der dritten

3) Kupfer | $F + F$ | Platin + Platin | Kupfer.

Aus 2) und 1) folgt durch Subtraktion

— F | Kupfer — Kupfer | Zink + F | Platin + Platin | Zink

oder

Platin | Zink + Zink | Kupfer + Kupfer | $F + F$ | Platin

oder, da nach den Gesetzen der Leiter erster Klasse für die beiden ersten Posten Platin | Kupfer gesetzt werden kann

Platin | Kupfer + Kupfer | $F + F$ | Platin,

oder, wenn mit Kupfer begonnen wird

Kupfer | $F + F$ | Platin + Platin | Kupfer.

Bildet man zwei Ketten aus demselben Anfangsgliede und derselben Flüssigkeit, jedoch mit verschiedenen Schlufsgliedern, so ist die Differenz der elektromotorischen Kräfte beider Ketten gleich der einer dritten Kette, die aus den Schlufsgliedern und derselben Flüssigkeit gebildet werden kann.

Nach diesem Gesetze kann man für jede Flüssigkeit eine Spannungsreihe der mit ihr zu kombinierenden Leiter erster Klasse aufstellen. Dazu vergleiche man die Lehrbücher.

219) Verbindung gleichartiger Ketten hintereinander. Drei Ketten aus Zink, Kupfer und verdünnter Schwefelsäure sollen hintereinander geschaltet werden werden, so dafs jedesmal der Kupferdraht vom Kupfer der einen zum Zink der andern führt. Dann sind die aufeinander folgenden Differenzen

$$Z_1 \mid F_1 + F_1 \mid K_1 + K_1 \mid Z_2 + Z_2 \mid F_2 + F_2 \mid K_2 + K_2 \mid Z_3 + Z_3 \mid F_3 + F_3 \mid K_3 + K_3 \mid Z_1$$

oder

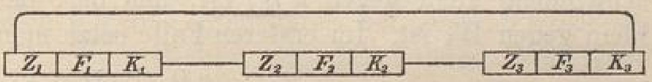
$$Z|F + F|K + K|Z + Z|F + F|K + K|Z + Z|F + F|K + K|Z.$$

Die gesamte elektromotorische Kraft ist also gleich

$$3(Z|F + F|K + K|Z),$$

d. h. dreimal so grofs, wie die der ersten Kette. Die Potentialdifferenzen bleiben nämlich trotz der Verbindungen erhalten. Folglich:

Fig. 156.

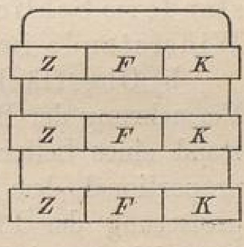


Die Verbindung von n gleichen Ketten hintereinander giebt die $n$fache Potentialdifferenz oder die $n$fache elektromotorische Kraft. Im folgenden soll diese Schaltungsweise als Säulenschaltung bezeichnet werden.

220) Verbindung gleichartiger Ketten nebeneinander. Die von Zink zu Zink gehenden Kupferdrähte geben die Potentialdifferenzen $Z|K + K|Z = 0$, ebenso geben die von Kupfer zu Kupfer gehenden keinen Beitrag. Die Potentialdifferenz der Kette ist also, wie die der einfachen, gleich

$$Z|F + F|K + K|Z.$$

Fig. 157.



Nebeneinanderschaltung bringt also keine Steigerung der Potentialdifferenz hervor. Im folgenden soll diese Schaltung, weil sie nur eine Vergröfserung der Platten bedeutet, als Oberflächenschaltung oder Parallelschaltung bezeichnet werden.

221) Vergleich beider Schaltungsarten. Nach dem Ohmschen Gesetze ist die Stromstärke proportional der Summe sämtlicher Potentialdifferenzen und umgekehrt proportional der Summe sämtlicher Widerstände. Ist D die Summe der Potentialdifferenzen, W_i die der inneren Widerstände (in der Flüssigkeit und den Metallen), W_b die der äufseren Widerstände im Schliefsungsbogen, so ist abgesehen von einem konstanten Faktor $\varkappa$, die Stromstärke oder Intensität

$$J = \frac{D}{W_i + W_b}.$$

Es fragt sich nun, wann Säulenschaltung und wann Oberflächenschaltung anzuwenden ist.

a) Säulenschaltung. Sind D, W_i die Potentialdifferenz bezw. der innere Widerstand für ein Element (Becher), so hat man bei Säulenschaltung für n Elemente die Stromstärke

$$J = \frac{nD}{nW_i + W_b},$$

denn dabei wächst die elektromotorische Kraft von D auf nD, aber es ist der innere Widerstand von n Bechern zu überwinden.

Zwei Grenzfälle sollen betrachtet werden, der, daſs W_b verschwindend klein gegen nW_i ist, und der, daſs nW_i verschwindend klein gegen W_b ist. Im ersteren Falle setze man $W_b = 0$. Man findet

$$J = \frac{nD}{nW_i} = \frac{D}{W_i},$$

d. h. die Intensität bleibt bei n Bechern dieselbe, wie bei einem Becher.

Im anderen Falle setze man $nW_i = 0$. Man findet

$$J = \frac{nD}{W_b} = n\frac{D}{W_b},$$

d. h. die Intensität steigt auf das $n$fache. Folglich:

Säulenschaltung ist unzweckmäſsig bei geringem Widerstande im Schlieſsungsbogen, sie ist zweckmäſsig bei starkem Widerstande im Schlieſsungsbogen.

b) Oberflächenschaltung. Hier bleibt nach obigem D bei der Vermehrung der Becherzahl unverändert dasselbe. Da aber der Widerstand eines Leiters, auch der einer leitenden Flüssigkeit, umgekehrt proportional dem Querschnitte der Leitung ist, da ferner die Vergröſserung der Plattenflächen einer solchen Querschnittsvermehrung entspricht, so wird der innere Widerstand W_i auf den n^{ten} Teil reduziert. So wird

$$J = \frac{D}{\frac{1}{n}W_i + W_b}.$$

Wiederum sind die beiden Grenzfälle zu betrachten. Ist W_b sehr klein gegen $\frac{1}{n}W_i$, so setze man $W_b = 0$. Man erhält

$$J = \frac{D}{\frac{1}{n}W_i} = \frac{nD}{W_i},$$

d. h. die Intensität steigt auf das $n$fache. Ist dagegen $\frac{1}{n}W_i$ klein gegen W_b, so folgt

$$J = \frac{D}{W_b},$$

d. h. die Intensität ist unverändert geblieben. Folglich:

Oberflächenschaltung ist unzweckmäfsig bei grofsem Widerstande im Schliefsungsbogen, sie ist sehr zweckmäfsig bei geringem Widerstande im Schliefsungsbogen.

222) Vergleich der möglichen Kombinationen. Hat man 24 Becher gleicher Konstruktion, so sind acht ordnungsmäfsige Kombinationen möglich, die durch $1 \cdot 24$, $2 \cdot 12$, $3 \cdot 8$, $4 \cdot 6$, $6 \cdot 4$, $8 \cdot 3$, $12 \cdot 2$, $24 \cdot 1$ gegeben sind, wo jedesmal der erste Faktor die Anzahl der Säulen bedeutet, der zweite die der Plattenpaare angiebt. Bei gleichem W_b ergeben sich folgende Intensitäten, bei denen D wiederum die Potentialdifferenz für einen Becher, W_i den inneren Widerstand für einen Becher bedeutet.

$$\underset{1\cdot 24}{J} = \frac{24\,D}{24\,W_i + W_b},$$

$$\underset{2\cdot 12}{J} = \frac{\frac{24}{2}D}{\frac{1}{2}\cdot\frac{24}{2}\,W_i + W_b} = \frac{12\,D}{6\,W_i + W_b},$$

$$\underset{3\cdot 8}{J} = \frac{\frac{24}{3}D}{\frac{1}{3}\cdot\frac{24}{3}\,W_i + W_b} = \frac{8\,D}{2{,}667\,W_i + W_b},$$

$$\underset{4\cdot 6}{J} = \frac{\frac{24}{4}D}{\frac{1}{4}\cdot\frac{24}{4}\,W_i + W_b} = \frac{6\,D}{1{,}5\,W_i + W_b},$$

$$\underset{6\cdot 4}{J} = \frac{\frac{24}{6}D}{\frac{1}{6}\cdot\frac{24}{6}\,W_i + W_b} = \frac{4\,D}{0{,}667\,W_i + W_b},$$

$$\underset{8\cdot 3}{J} = \frac{\frac{24}{8}D}{\frac{1}{8}\cdot\frac{24}{8}\,W_i + W_b} = \frac{3\,D}{0{,}375\,W_i + W_b},$$

$$\underset{12\cdot 2}{J} = \frac{\frac{24}{12}D}{\frac{1}{12}\cdot\frac{24}{12}\,W_i + W_b} = \frac{2\,D}{0{,}167\,W_i + W_b},$$

$$\underset{24\cdot 1}{J} = \frac{\frac{24}{24}D}{\frac{1}{24}\cdot\frac{24}{24}\,W_i + W_b} = \frac{D}{\frac{1}{24}\,W_i + W_b}.$$

223) Der Maximaleffekt. Für irgend eine dieser Zusammenstellungen sei nun W_b gleich dem gesamten inneren Widerstande W_i, D die gesamte elektromotorische Kraft, also die Intensität

$$J = \frac{D}{W_b + W_b} = \frac{D}{2\,W_b}.$$

Macht man dann bei gleicher Becherzahl die Kombination zu einer anderen, indem man z. B. die Zahl der Säulen n mal so grofs macht, die der Plattenpaare aber auf den n^{ten} Teil reduziert, so wird nach obigem die neue Intensität

$$J_1 = \frac{\frac{D}{n}}{\frac{W_b}{n^2} + W_b} = \frac{D}{\frac{1}{n} W_b + n W_b} = \frac{D}{W_b\left(n + \frac{1}{n}\right)}.$$

Macht man der Reihe nach $n = 2, 3, 4, \ldots$, so wird der Reihe nach J_1 gleich $\frac{D}{W_b\left(2+\frac{1}{2}\right)}, \frac{D}{W_b\left(3+\frac{1}{3}\right)}, \frac{D}{W_b\left(4+\frac{1}{4}\right)}, \ldots$, d. h. bei jeder Vermehrung der Säulenzahl nimmt die Stromstärke ab.

Reduziert man dagegen die Anzahl der Säulen auf den n^{ten} Teil und macht man die der Plattenpaare n mal so grofs, so erhält man

$$J_2 = \frac{D}{W_b\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)}\right]} = \frac{D}{W_b\left[\frac{1}{n} + n\right]}.$$

Für n gleich 2, 3, 4, ... also erhält man auch jetzt die entsprechende Schwächung. Folglich:

Für jede Anzahl von Bechern ist diejenige Kombination die günstigste, bei welcher der Widerstand im Schliefsungsbogen gleich dem inneren Widerstande ist.

Die Anzahl der Säulen, die sich daraus berechnen läfst, könnte aber eine gebrochene werden. Also mufs man den Satz dahin beschränken, dafs die Kombination um so günstiger ist, je näher W_b dem inneren Widerstande W_i ist.

224) **Aufgabe.** Gegeben seien m Becher, jeder von der elektromotorischen Kraft D und von einem inneren Widerstande W_i; der äufere Widerstand sei W_b. Welche Kombination ist die günstigste?

Auflösung. Wählt man eine Säule mit m Plattenpaaren, so wird die Intensität

$$\underset{1 \cdot m}{J} = \frac{mD}{mW_i + W_b},$$

wählt man n Säulen mit $n_1 = \frac{m}{n}$ Plattenpaaren, so erhält man

$$\underset{n \cdot n_1}{J} = \frac{\frac{m}{n} D}{\frac{1}{n} \cdot \frac{m}{n} W_i + W_b}.$$

Die höchste Intensität ergiebt sich bei $\frac{m}{n^2} W_i = W_b$, also ergiebt sich die günstigste Anzahl der Säulen aus

$$n = \sqrt{\frac{m W_i}{W_b}},$$

die zugehörige Anzahl der Plattenpaare aus

$$n_1 = \frac{m}{n} = \sqrt{\frac{m W_b}{W_i}}.$$

Die Kenntnis von D ist für die Lösung nicht nötig.

Beispiel. Hat man 8 Becher, jeden von einem inneren Widerstande von 15 Widerstandseinheiten und sind im äußeren Schließungsbogen 40 Widerstandseinheiten zu überwinden, so wählt man als Anzahl der Plattenpaare die nächste ganze Zahl zu

$$n_1 = \sqrt{\frac{m W_b}{W_i}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 40}{15}} = 4{,}3,$$

d. h. die Zahl 4, für die Anzahl der Säulen also $\frac{8}{4} = 2$.

Probe: Die Intensität wird

$$\underset{2\cdot 4}{J} = \frac{\frac{8}{2} D}{\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{2} W_i + W_b} = \frac{8 D}{4 W_i + 2 W_b} = \frac{8 D}{4 \cdot 15 + 2 \cdot 40} = \frac{2}{35} D.$$

Eine Säule mit acht Plattenpaaren würde geringere Intensität geben, nämlich

$$\underset{1\cdot 8}{J} = \frac{8 D}{8 W_i + W_b} = \frac{8 D}{8 \cdot 15 + 40} = \frac{1}{20} D.$$

Vier Säulen mit je 2 Plattenpaaren würden geben

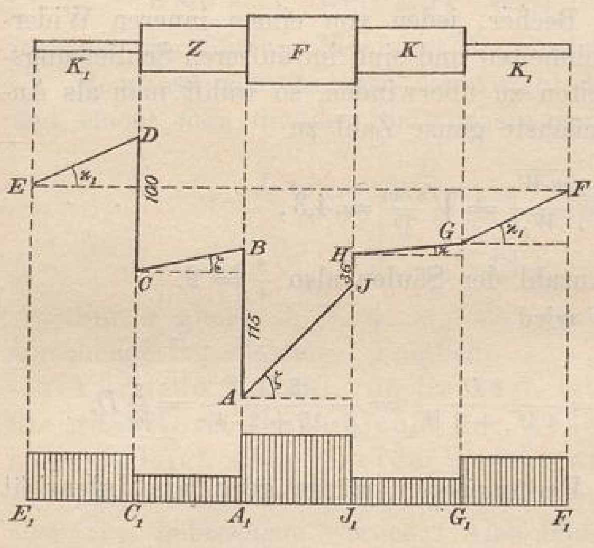
$$\underset{4\cdot 2}{J} = \frac{\frac{8}{4} D}{\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{4} W_i + W_b} = \frac{8 D}{2 W_i + 4 W_b} = \frac{8 D}{2 \cdot 15 + 4 \cdot 40} = \frac{4}{95} D.$$

was ebenfalls weniger ist. (Es stimmt mit $\underset{1\cdot 8}{J}$ nicht überein, weil $2 \cdot 4$ nur die angenähert günstigste Kombination war.)

225) Graphische Darstellung der Strömung in einer Kette. Der Vorgang in der aus Zink, Kupfer und verdünnter Schwefelsäure gebildeten Kette kann man sich mit Hilfe der in Nr. 217 gegebenen Zahlen Zink | Schwefelsäure $= -115$, Kupfer-Schwefelsäure $= -36$, Zink | Kupfer $= +100$ (also Kupfer-Zink $= -100$) leicht veranschaulichen, sobald man nur den Querschnitt jedes Leiters über-

all als konstant annimmt, so daſs das Potentialdiagramm für jeden durch eine schräge Gerade begrenzt wird, aus der sich das Gefälle als Tangente des Neigungswinkels ergiebt. So bedeutet z. B. die Neigung von ED das Potentialgefälle im Kupferdraht, $DC = -100$ den durch die Berührung Kupfer-Zink entstehenden Potentialabsturz 100, die Neigung von CB das Potentialgefälle im Zink, BA den durch die Berührung Zink-Schwefelsäure entstehenden Potentialabsturz 115, die Neigung von AJ das Potentialgefälle in der verdünnten Schwefelsäure, JH den plötzlichen Potentialaufstieg durch die Berührung Schwefelsäure-Kupfer, die Neigung von HG das Potentialgefälle in der Kupferplatte, die von GF das stärkere Gefälle in dem gröſseren Widerstand leistenden Drahte.

Fig. 158.



Um die Wanderung der negativen Elektrizität zu veranschaulichen, denke man sich die Schräglinien des Potentialdiagramms als schiefe Ebenen, deren Reibung so groſs gemacht wird, daſs ein herabgleitender Körper auf jeder mit einer konstanten Geschwindigkeit herabgleiten kann, deren Projektion auf die Horizontale der Geschwindigkeit in der Mittellinie jedes Teils der oberen Figur entspricht. Der Körper wird z. B. von A nach B gehoben, gleitet abwärts nach C, wird gehoben von C nach D, gleitet von D nach E und von dem sich anschlieſsenden F nach G, sodann von G nach H und trotz des Potentialsturzes von H nach J gleitet er nach A zurück, um dann die Wanderung zu wiederholen. Betrachtet man die Figur von oben her, so kann man ebenso die Wanderung der positiven Elektrizität veranschaulichen. Der unterste Teil der Figur veranschaulicht durch die Rechtecke die geleisteten Arbeiten, die im Überwinden der Widerstände beruhen, die in den verschiedenen Teilen die durch die Rechteckshöhen veranschaulichte Gröſse haben.

226) Verallgemeinertes Ohmsches Gesetz. Durch Rechnung ergiebt sich, wenn V_δ und V_δ' die Potentialwerte an den Enden des Kupferdrahtes, V_ζ und V_ζ' die an den Enden des Zinks, V_φ und V_φ'

die an den Enden der Flüssigkeit, $V_\varkappa$ und $V'_\varkappa$ die an den Enden der Kupferplatte geltenden Potentialwerte bedeuten, von links nach rechts hin eine Reihe von Gleichungen, wie z. B. $G_d = \frac{V'_d - V_d}{l}$, d. h. Potentialgefälle im Zink gleich Potentialdifferenz durch Plattenlänge. Da ferner die Strommenge in allen Querschnitten F dieselbe ist, so folgt, wenn die $\varkappa$ die Leitungsfähigkeiten bezeichnen

$$\varkappa_d F_d G_d = \varkappa_\zeta F_\zeta G_\zeta = \varkappa_\varphi F_\varphi G_\varphi = \varkappa_\varkappa F_\varkappa G_\varkappa.$$

Endlich sind noch Gleichungen wie $V'_d - V_\zeta = K \mid Z$ vorhanden. Die Gleichungen sind:

1) $V_d + l_d G_d = V'_d$

2) $V'_d - V_\zeta = K \mid Z$

3) $V_\zeta + l_\zeta \frac{\varkappa_d F_d}{\varkappa_\zeta F_\zeta} G_d = V'_\zeta$. Hier ist der zweite Posten aus $l_\zeta G_\zeta$ entstanden, und zwar mit Hilfe der Gleichung $\varkappa_d F_d G_d = \varkappa_\zeta F_\zeta G_\zeta$.

4) $V'_\zeta - V_\varphi = Z \mid F$

5) $V_\varphi + l_\varphi \cdot \frac{\varkappa_d F_d}{\varkappa_\varphi F_\varphi} = V'_\varphi$. Hier ist der zweite Posten ebenso, wie in 3) entstanden.

6) $V'_\varphi - V_\varkappa = F \mid K$

7) $V_\varkappa + l_\varkappa \frac{\varkappa_d F_d}{\varkappa_\varkappa F_\varkappa} G_d = V'_\varkappa$. Vgl. Nr. 3.

8) $V'_\varkappa - V_\varkappa = 0$. Zwischen Kupfer und Kupfer ist die Potentialdifferenz gleich Null.

Durch Addition, bei der sich vieles weghebt, erhält man daraus die Gleichung

$$l_d G_d + l_\zeta \frac{\varkappa_d F_d}{\varkappa_\zeta F_\zeta} + l_\varphi \frac{\varkappa_d F_d}{\varkappa_\varphi F_\varphi} + l_\varkappa \frac{\varkappa_d F_d}{\varkappa_\varkappa F_\varkappa} = K \mid Z + Z \mid F + F \mid K,$$

oder

$$\varkappa_d F_d G_d \left[\frac{l_d}{\varkappa_d F_d} + \frac{l_\zeta}{\varkappa_\zeta F_\zeta} + \frac{l_\varphi}{\varkappa_\varphi F_\varphi} + \frac{l_\varkappa}{\varkappa_\varkappa F_\varkappa}\right] = K \mid Z + Z \mid F + F \mid K.$$

Hier ist $\varkappa_d F_d G_d$ die Stromstärke im Kupferdraht oder die Stromstärke J der Kette überhaupt. Nach dem Ohmschen Gesetze ist ferner der Widerstand im Kupferdraht proportional der Länge l_d, umgekehrt proportional dem Querschnitte F_d und umgekehrt proportional dem Faktor $\varkappa_d$ der Leitungsfähigkeit, d. h. es ist der Widerstand $W_d = \frac{l_d}{\varkappa_d F_d}$, ebenso $W_\zeta = \frac{l_\varphi}{\varkappa_\zeta F_\zeta}$ u. s. w. Also hat man

$$J[W_d + W_\zeta + W_\varphi + W_\varkappa] = K \mid Z + Z \mid F + F \mid K,$$

folglich ist

$$9)\quad J = \frac{K \mid Z + Z \mid F + F \mid K}{W_d + W_\zeta + W_\varphi + W_\varkappa} = \frac{\text{Summe der elektromotorischen Kräfte}}{\text{Summe der Widerstände}},$$

oder

$$\text{Stromstärke} = \frac{\text{Summe der Potentialunterschiede an den Berührungsstellen}}{\text{Summe der Widerstände}}.$$

Die Gleichung 9) ist weiter nichts, als das auf die gesamte Kette ausgedehnte Ohmsche Gesetz.

Eine der Potentialgröfsen in den addierten Gleichungen, z. B. V_d oder V'_d, kann man beliebig annehmen, da es gleichgültig ist, von wo aus man das Potential zählen will (die Gleichgültigkeit des Nullpunktes bei Thermometern, z. B. bei Celsius und Fahrenheit, ist etwas Entsprechendes). Mit Hilfe der Gleichungen 1) bis 8) ergeben sich dann die Potentialwerte für die Grenzstellen, ebenso sind sie für die zwischenliegenden Stellen mittels Gleichungen ersten Grades leicht zu berechnen.

Die Potentialdifferenz zwischen zwei beliebigen Stellen der Kette ist gleich der Differenz der zwischen beiden Punkten geleisteten Arbeiten und der etwa zwischen beiden liegenden „Potentialstürze" an den Berührungsstellen.

In Fig. 158 hat man von C_1 bis G_1 die Arbeit zur Überwindung des wesentlichen oder inneren Widerstandes, aufserhalb dieser Strecke die Arbeit zur Überwindung des äufseren Widerstandes.

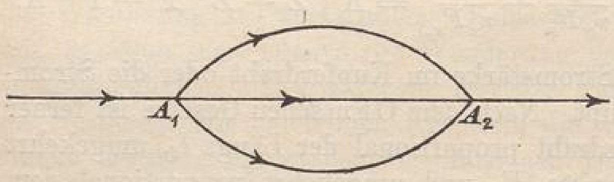
Im Beispiele ist der Wert des Zählers in Gleichung 9)

$$K \mid Z + Z \mid F + F \mid K = -100 - 115 + 36 = -179,$$

wenn $Z \mid K = 100$ Potentialeinheiten gesetzt wird.

227) Stromverzweigung. Der Schliefsungsbogen einer galvanischen Kette spalte sich bei A_1 in mehrere Teile, die sich bei A_2 wieder vereinigen. Es fragt sich, welche Stromstärke in den einzelnen Drähten herrscht. Ist die Potentialdifferenz zwischen den Stellen A_1 und A_2 gleich $V_2 - V_1$, so herrscht in den einzelnen Drähten das Potentialgefälle $\frac{V_2 - V_1}{l_1}$, $\frac{V_2 - V_1}{l_2}$, $\frac{V_2 - V_1}{l_3}$, also sind die Strommengen

Fig. 159.



$$J_1 = \varkappa F_1 \frac{V_2 - V_1}{l_1}, \quad J_2 = \varkappa F_2 \frac{V_2 - V_1}{l_2}, \quad J_3 = \varkappa F_3 \frac{V_3 - V_1}{l_3}.$$

Nach vorigem Abschnitt sind aber die Widerstände in den Drähten

$$W_1 = \frac{l_1}{\varkappa F_1}, \quad W_2 = \frac{l_2}{\varkappa F_2}, \quad W_3 = \frac{l_3}{\varkappa F_3},$$

also ist auch

$$J_1 = \frac{V_2 - V_1}{W_1}, \quad J_2 = \frac{V_2 - V_1}{W_2}, \quad J_3 = \frac{V_2 - V_1}{W_3}.$$

Demnach ist

$$J_1 : J_2 : J_3 = \frac{1}{W_1} : \frac{1}{W_2} : \frac{1}{W_3}.$$

Folglich gilt der Satz: Bei jeder Stromverzweigung verhalten sich die Stromstärken wie die umgekehrten Werte der Widerstände in den Einzeldrähten. Man kann auch schreiben:

$$\boldsymbol{J_1 W_1 + J_2 W_2 + J_3 W_3 = 0.}$$

Dabei ist die Gesamtstärke wieder

$$J = J_1 + J_2 + J_3.$$

Soll man die drei Drähte durch einen einzigen so ersetzen, daſs auſserhalb $A_1 A_2$ sich nichts ändert, so ist sein Widerstand W so zu wählen, daſs die Stromstärke

$$\frac{V_2 - V_1}{W} = \frac{V_2 - V_1}{W_1} + \frac{V_2 - V_1}{W_2} + \frac{V_2 - V_1}{W_3}$$

wird. Es muſs also sein.

$$\frac{1}{W} = \frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} + \frac{1}{W_3},$$

der Ersatzdraht muſs demnach einen Widerstand haben, dessen umgekehrter Wert gleich der Summe der umgekehrten Werte der Einzelwiderstände ist.

Aus $J = \frac{V_2 - V_1}{W}$, $J_1 = \frac{V_2 - V_1}{W_1}$ folgt zugleich $\frac{J}{J_1} = \frac{W_1}{W}$. Für die Strömungen und Widerstände im Ersatzdraht und in den Einzeldrähten gelten also die Gleichungen

$$\frac{J}{J_1} = \frac{W_1}{W}, \quad \frac{J}{J_2} = \frac{W_2}{W}, \quad \frac{J}{J_3} = \frac{W_3}{W},$$

d. h. die betreffenden Stromstärken verhalten sich umgekehrt wie die Widerstände.

228) Die Kirchhoffschen Sätze über Stromverzweigung. a) Treffen bei stationärer Strömung mehrere Drähte in einem

Punkte A zusammen, so mufs die Summe der Stromstärken gleich Null sein. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so würde sich in dem Punkte positive oder negative Elektrizität anhäufen, so dafs von stationärem Zustande keine Rede sein könnte. (Fig. 160.)

Fig. 160.

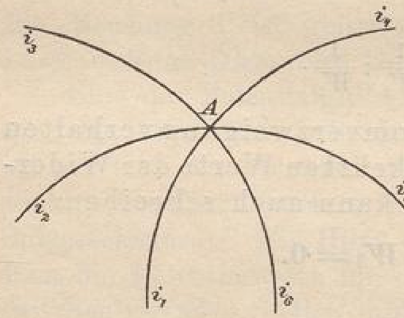
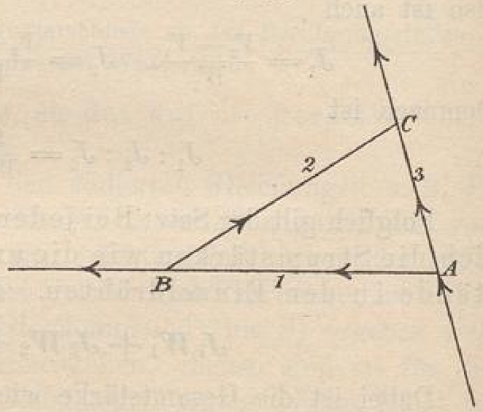


Fig. 161.



b) Durch drei Punkte A, B und C (Fig. 161) mögen Drähte gehen und so ein geschlossenes Dreieck bilden, in dessen Ecken Elektrizität zu- bezw. abströmt. Die Strömung sei eine stationäre, so dafs das Potential an jeder Stelle konstant bleibt. Scheidungskräfte, welche Potentialstürze U_a, U_b, U_c geben, mögen in A, B und C wirken. Auf dem ersten Draht sei in A der Potentialwert V_1, er verwandelt sich bei B in $V_1 + G_1 l_1$, wenn G_1 das Gefälle, l_1 die Länge ist, beim Übergange auf den zweiten Draht entsteht aber das Potential

1) $$V_1 + G_1 l_1 - U_b = V_2,$$

welches bis C hin sich in $V_2 + G_2 l_2$ verwandelt. Der Übergang auf den dritten Draht giebt

2) $$V_2 + G_2 l_2 - U_c = V_3.$$

Dies verwandelt sich bis A hin in $V_3 + G_3 l_3$. Der Übergang nach A mufs aber das alte Potential V_1 wiedergeben, wie es der stationäre Charakter verlangt, d. h. es ist

3) $$V_3 + G_3 l_3 - U_a = V_1.$$

Durch Addition bilde man aus den drei Gleichungen eine neue. Diese wird

4) $$G_1 l_1 + G_2 l_2 + G_3 l_3 = U_a + U_b + U_c.$$

Nun ist im ersten Drahte die Stromstärke $J_1 = \varkappa_1 F_1 G_1$, wenn F_1 sein Querschnitt ist. Zugleich ist nach **Ohm** der Widerstand in ihm

$W_1 = \frac{l_1}{\varkappa_1 F_1}$. Bildet man das Produkt, so folgt $J_1 W_1 = l_1 G_1$. Entsprechendes gilt für die anderen Drähte. Einsetzung des Wertes von $l_1 G_1$ in die Gleichung 4) giebt schliefslich

$$J_1 W_1 + J_2 W_2 + J_3 W_3 = U_a + U_b + U_c.$$

Man übersieht leicht, dafs diese Gleichung ganz allgemein gilt, wenn Drähte ein geschlossenes Polygon bilden, auch wenn beliebige andersliegende Stellen mit Scheidungskräften und Potentialstürzen angebracht werden. Demnach lautet der zweite Kirchhoffsche Satz folgendermafsen:

Bilden Drähte eine geschlossene Figur und findet in ihnen eine stationäre Strömung statt, so ist die Summe der elektromotorischen Kräfte (d. h. der Potentialdifferenzen an den Scheidungsstellen) gleich der Summe der Produkte aus den Stromstärken und Widerständen in den einzelnen Drähten.

Sind keine Scheidungskräfte vorhanden, so ist

$$J_1 W_1 + J_2 W_2 + J_3 W_3 = 0.$$

In dieser Form enthält der Satz den vorigen als besonderen Fall in sich. Man hat nur nötig, das Vieleck auf einen Punkt zurückzuführen.

Durch die von Ohm und Kirchhoff aufgestellten Gesetze ist die rechnende Theorie der Ströme zu einem gewissen Abschlusse gebracht. Bei Kirchhoff handelt es sich besonders um die Theorie der Nebenschlüsse. Nach seinem ersten Gesetze ist klar, dafs, wenn ein Draht sich in zwei Teile spaltet und in dem einen Teile sich ein grofser Widerstand befindet, der Hauptteil des Stromes durch den andern Draht geht, denn die Stromstärken sind umgekehrt proportional den Widerständen. Wie dies bei der Differentiallampe und anderen Vorrichtungen Anwendung findet, darüber vergleiche man die Lehrbücher, ebenso über die höchst wichtigen Widerstandsvergleichungen. Auch erkennt man, dafs es möglich ist, starke Ströme dadurch zu messen, dafs man nur $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ davon durch Nebenschlüsse in einen Draht leitet und den schwächeren Strom am Galvanometer mifst. Nur um einige Beispiele anzudeuten, geben wir hier einen Einblick in die Lehre von den Strombrücken.

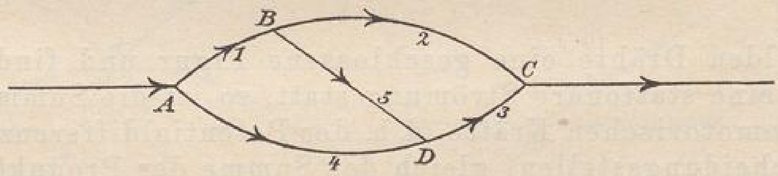
229) Brücke von Wheatstone. Ein Strom von der Intensität J verzweige sich so, wie es Fig. 162 darstellt. Nach dem ersten Kirchhoffschen Satze gelten für die Punkte A, B, C, D, wenn man die ankommenden Ströme positiv, die abgehenden negativ einsetzt, die Gleichungen

1) $J - J_1 - J_4 = 0.$ 2) $J_1 - J_2 - J_5 = 0.$ 3) $J_2 + J_3 - J = 0.$
4) $J_4 + J_5 - J_3 = 0.$

Für die Stromkreise ABD und BCD gelten unter Berücksichtigung der Richtungen nach dem zweiten Kirchhoffschen Satze die Gleichungen

5) $J_1 W_1 + J_5 W_5 - J_4 W_4 = 0.$ 6) $J_2 W_2 - J_3 W_3 - J_5 W_5 = 0.$

Fig. 162.



Man berechne J_4 aus 1) und setze den Wert in 5) ein. Ebenso berechne man J_3 aus 3) und setze den Wert in 6) ein. Aus der ersten neuen Gleichung berechne man J_1, aus der zweiten neuen J_2 und setze beide Werthe in 2) ein. Dann kann man J_5 berechnen. Das Resultat ist

$$J_5 = J \frac{W_2 W_4 - W_1 W_3}{(W_1 + W_4)(W_2 + W_3) + W_5 (W_1 + W_2 + W_3 + W_4)}.$$

Soll nun durch die Brücke 5 kein Strom gehen, so mufs der Zähler des Bruches gleich Null sein, d. h. es mufs sein

$$W_2 W_4 - W_1 W_3 = 0 \quad \text{oder} \quad W_1 : W_2 = W_4 : W_3.$$

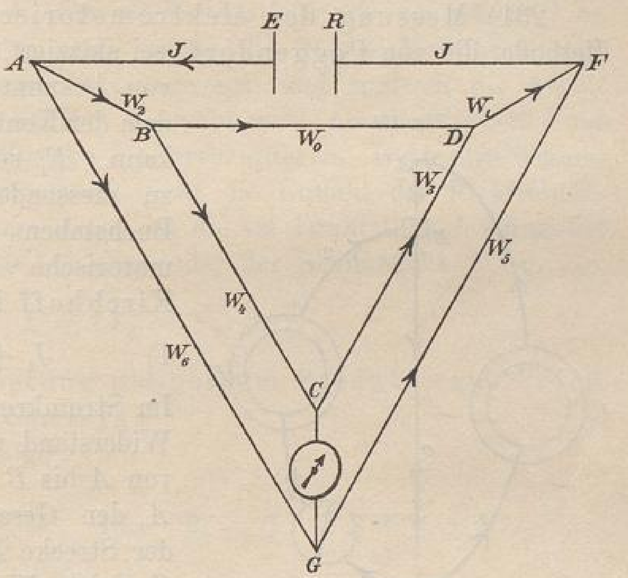
Macht man endlich noch die Widerstände W_1 und W_2 gleich, dann mufs, wenn die Brücke keinen Strom giebt, auch $W_3 = W_4$ sein.

Geht man von $W_1 = W_2$ aus, so erleichtert sich natürlich die obige Rechnung. Um festzustellen, ob durch 5 ein Strom geht, bringe man etwa in der Mitte von 5 ein Galvanometer an, dessen Ausschläge den Strom anzeigen. Will man nun den Widerstand in irgend einer Art von Metalldraht messen, so setzt man ihn als Draht 4 in den aus bereits gemessenem Drahte bestehenden Apparat ein und ändert die Länge l_4 so lange, bis das Galvanometer keinen Ausschlag mehr zeigt. Ist dies der Fall, so ist $W_4 = W_3$ und damit gezeigt, wie die beiden Arten von Drähten sich bezüglich der Widerstände verhalten. Über die Verfeinerungen des Apparates und seinen Schutz gegen störende Induktionsströme vergleiche man die Lehrbücher der Physik.

230) Thomsonsche Doppelbrücke. In Fig. 163 bedeutet E das Element, R den Rheostat. Der Strom geht von E aus nach

A und spaltet sich dann in AB und AG. Das erstere spaltet sich in BC und BD, das letztere in GC und GF. Von C gehen BC und GC vereinigt weiter nach D, wo sie mit BD zusammentreffen und mit ihm nach F gehen. Dort mit GF zusammentreffend gehen sie nach R und zum Elemente zurück. AB sei der zu untersuchende Draht, DF der bekannte Normaldraht. Man sorgt wieder dafür, daſs durch GC der Strom Null geht, so daſs die Kenntnis von W_7 überflüssig ist.

Fig. 163.



Nach dem ersten Satze von Kirchhoff ist bei A, B, C u. s. w.

$$J - J_2 - J_6 = 0, \quad J_2 - J_0 - J_4 = 0, \quad J_4 + 0 - J_3 = 0,$$
$$J_0 + J_3 - J_1 = 0, \quad J_6 - 0 - J_5 = 0, \quad J_1 + J_5 - J = 0.$$

Nach dem zweiten Satze von Kirchhoff geben die Stromkreise folgende Gleichungen:

$$J_0 W_0 - J_3 W_3 - J_4 W_4 = 0, \quad J_2 W_2 + J_4 W_4 - 0 \cdot W_7 - J_6 W_6 = 0,$$
$$J_1 W_1 - J_5 W_5 + 0 \cdot W_7 + J_3 W_3 = 0.$$

Durch Elimination der J findet man, daſs, wenn die Brücke GC keinen Strom erhält, die Proportion

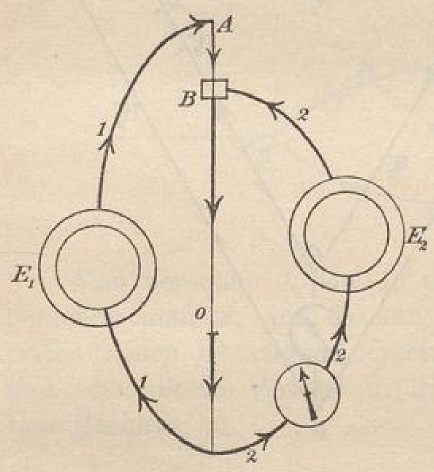
$$W_5 : W_6 = [W_1 (W_0 + W_3 + W_4) + W_0 W_3]$$
$$: [W_2 (W_0 + W_3 + W_4) + W_0 W_4]$$

erfüllt ist. Ist nun $W_5 = W_6$ gemacht, so wird das dritte Glied gleich dem vierten. Ist ferner $W_3 = W_4$ gemacht, so folgt aus dieser Gleichheit $W_1 = W_2$. Das Instrument hat den Vorteil, daſs man die Widerstände W_3, W_4, W_5, W_6 so groſs wählen kann, daſs die Übergangswiderstände, die bei unvollkommenem Kontakt an den Stellen A, B, D und F auftreten, dagegen verschwinden. Dies war bei der Wheatstonschen Brücke nicht möglich. Übrigens hat man die Doppelbrücke dahin verfeinert, daſs die Kontaktstörungen sich gegenseitig ganz aufheben.

Über die Einrichtung der eigentlichen Apparate und über die Methode der Widerstandsbestimmungen vergleiche man besonders das Handbuch von Kittler.

231) Messung der elektromotorischen Kraft. Nur eine Methode, die von Poggendorf, sei skizziert. AC ist ein Platindraht von bekanntem Widerstande a, auf dem der Kontakt B verschoben werden kann. E_1 sei ein bekanntes, E_2 ein zu messendes Element, wobei die Buchstaben zugleich die elektromotorische Kraft bedeuten. Nach Kirchhoff ist für den Punkt B

Fig. 164.



$$1) \qquad J_1 + J_2 - J_0 = 0.$$

Im Stromkreise $E_1 A, B, C, E_1$ ist der Widerstand von C bis A gleich W_1, von A bis B gleich $(A - W_0)$, wenn A den Gesamtwiderstand, W_0 den der Strecke BC bedeutet, von B bis C gleich W_0, die Intensität ist aber von E_1 über A bis B gleich J_1, von B bis C gleich J_0, von C bis E_1 gleich J_1, da ebenso viel aus E_1 zurückgehen mufs, wie aus E_1 hervorging. Für diesen Kreis also ist nach Kirchhoff

$$2) \qquad J_1 W_1 + J_1 (A - W_0) + J_0 W_0 = E_1,$$

für den andern Stromkreis ist einfacher

$$3) \qquad J_2 W_2 + J_0 W_0 = E_2.$$

Der Kontakt B werde nun so lange verschoben, bis die Nadel auf Null zeigt, so dafs das Element E_2 die Strömung $J_2 = 0$ giebt. Die Gleichungen gehen dann in einfachere über. Aus 1) folgt $J_0 = J_1$, aus 2) folgt durch Einsetzung dieses Wertes $J_1 = \frac{E_1}{A W_1}$, aus 3) folgt durch Einsetzung beider Werte

$$E_2 = J_0 W_0 = J_1 W_0 = \frac{W_0}{A + W_1} E.$$

Da A, W_1, W_0 und E_1 bekannte Gröfsen sind, so ist die unbekannte elektromotorische Kraft E_2 als $\frac{W_0}{A + W_1} E_1$ bestimmt worden.

Ist z. B. E_1 ein Daniellsches Element und setzt man dessen elektromotorische Kraft gleich 1, so kann man daraus die des Bunsen-

Elements $= 1{,}7$, des Groveschen $= 1{,}7$, des Chromsäure-Elements $= 1{,}8$ bestimmen.

232) Das Joulesche Gesetz und der Stromeffekt. Die Potentialdifferenz $V_2 - V_1$ für ein Drahtstück von der Länge l bedeutet die Arbeit, die nötig sein würde, die freie elektrische Einheit der Stromrichtung entgegen fortzubewegen und zugleich die Arbeit, die von den elektrischen Kräften ausgeübt wird, um die Einheit durch die Widerstände dieser Strecke hindurchzuführen. Geht also sekundlich durch den Drahtquerschnitt nicht die Einheit der Elektrizitätsmenge, sondern die Menge J, so ist die im Drahtstück l sekundlich geleistete Arbeit oder die Leistung, oder der Stromeffekt

1) $$L = (V_2 - V_1)\,J.$$

Also: Sekundenleistung gleich dem Produkte aus Potentialdifferenz und Stromstärke.

Im Drahtstück ist aber

$$J = \frac{V_2 - V_1}{W}, \quad \text{also} \quad V_2 - V_1 = JW.$$

Einsetzung in 1) giebt

2) $$L = J^2 W,$$

d. h. Sekundenleistung gleich dem Produkte aus dem Widerstande und dem Quadrate der Stromstärke.

Besteht nun die Kette aus verschiedenen Teilen gleichen Querschnitts, wie z. B. in Fig. 158 aus Z, F, K und K_1, d. h. aus Zink, verdünnter Schwefelsäure, Kupferplatte und Kupferdraht (d), so ist die Sekundenleistung in den einzelnen Teilen bei den dortigen Bezeichnungen

$$\begin{aligned}(V'_\zeta - V_\zeta)\,J &= W_\zeta J^2\\(V'_\varphi - V_\varphi)\,J &= W_\varphi J^2\\(V'_\varkappa - V_\varkappa)\,J &= W_\varkappa J^2\\(V'_d - V_d)\,J &= W_d J^2\end{aligned}$$

Die gesamte Sekundenleistung also ist

3) $$L = (W_\zeta + W_\varphi + W_\varkappa + W_d)\,J^2 = WJ^2,$$

wo W den gesamten Widerstand der Kette bezeichnet.

Nun ist aber

$$J = \frac{K\,|\,Z + Z\,|\,F + F\,|\,K}{W_\zeta + W_\varphi + W_\varkappa + W_d} = \frac{E}{W},$$

wo E die gesamte elektromotorische Kraft bedeutet, also kann man in Gleichung 3) $JW = E$ setzen. So wird

$$4) \qquad L = J \cdot E.$$

Daher lautet das von Joule aufgestellte Gesetz:

Der Stromeffekt oder die sekundliche Leistung des Stromes ist gleich dem Produkte aus der Stromstärke und der gesamten elektromotorischen Kraft.

Beispiel. Ist $J = 30$ Ampère, $E = 20$ Volt, so ist die Sekundenleistung gleich $30 \cdot 20 = 600$ Volt-Ampère $= 600$ Watt, also der Stromeffekt gleich 600 Joule $= \frac{600}{736}$ Pferdestärken $= 61{,}1$ mkg pro Sekunde. Setzt man 425 mkg $= 1$ Kalorie, so ist der Stromeffekt, in Kalorien ausgedrückt, gleich 0,14 Kalorien in der Sekunde.

In den Einheiten des Centimeter-Gramm-Sekundensystems würde man das dortige mechanische Äquivalent der Grammkalorie z. B. gleich A (Arbeit) setzen, und so als Wärmemenge für die Sekunde erhalten

$$5) \qquad Q = \frac{JE}{A} = \frac{WJ^2}{A},$$

oder wenn man $\frac{1}{A} = C$ setzt

$$6) \qquad Q = CJE = CWJ^2.$$

233) Der nutzbare Teil des Stromeffektes. Die Arbeit zur Überwindung des zwischen den Klemmschrauben des Schliefsungsbogens befindlichen Widerstandes kann man durch irgend eine Nutzarbeit von entsprechender Gröfse ersetzen, ohne dafs im Innern der Kette sich etwas ändert, d. h. der äufsere Stromeffekt, d. h. die Sekundenleistung im Schliefsungsbogen, kann als Nutzeffekt bezeichnet werden.

Ist E die gesamte elektromotorische Kraft der Kette, E_b die Potentialdifferenz des Schliefsungsbogens zwischen den Klemmschrauben, so ist naturgemäfs

$$E_b : E - E_b = W_b : W_i,$$

denn E_b wird aufgebraucht durch Überwindung des Bogenwiderstandes W_b. Daraus folgt als Bogenwiderstand

$$W_b = \frac{E_b W_i}{E - E_b}.$$

Die sekundliche Arbeit im Schliefsungsbogen ist gleich Potentialdifferenz mal Stromstärke, also ist der Nutzeffekt gleich

$$L_b = E_b \cdot J = E_b \frac{E}{W_i + W_b} = \frac{E_b E}{W_i + \frac{E_b W_i}{E - E_b}} = \frac{E_b (E - E_b)}{W_i}.$$

Hier sind W_i und E gegebene Gröfsen. Es fragt sich, wann (theoretisch genommen) der Nutzeffekt seinen Höchstwert erhält. Man setze das veränderliche $E_b = x$, so dafs es sich im Zähler um $x(E - x)$ handelt. Setzt man dies gleich irgend einer Gröfse a, so hat man in $x(E - x) = a$ die Gleichung, durch deren Lösung man erfährt, welches x auf diesen Wert a führt. Aus $x^2 - Ex = -a$ folgt aber $x = \frac{E}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{E}{2}\right)^2 - a}$. Die Lösung wird imaginär, wenn $a > \left(\frac{E}{2}\right)^2$ ist. Der höchste mögliche Wert von a ist also $a = \left(\frac{E}{2}\right)^2$, und dieser wird erreicht bei $x = \frac{E}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{E}{2}\right)^2 - \left(\frac{E}{2}\right)^2} = \frac{E}{2}$.

Man erhält demnach den theoretischen Maximaleffekt, wenn $E_b = \frac{1}{2}E$ ist, d. h. wenn der äufsere Widerstand der Kette gleich dem inneren Widerstande ist, oder wenn die Klemmspannung gleich der Hälfte der gesamten elektromotorischen Kraft ist.

Ob freilich mit diesem theoretischen Maximaleffekte auch ökonomisch der höchste Nutzeffekt erzielt wird, das ist eine andere Frage. Man vergleiche dazu das über die Becherkombination in Nr. 223 Gesagte, wo derselbe Satz auftrat.

234) Temperatur des Schliefsungsbogens. In jedem Teile des Schliefsungsbogens wird eine Sekundenleistung $L = J \cdot E_1 = J^2 \cdot W_1$ geliefert, wobei J die Intensität, E_1 die Potentialdifferenz des Stückes, W_1 sein Widerstand ist. Bei Drähten von gleicher Länge ist der Widerstand umgekehrt proportional den Querschnitten oder den Quadraten der Durchmesser. Dasselbe gilt also auch von der Leistung und der gelieferten Wärmemenge in ihnen, d. h.

$$Q_1 : Q_2 = d_2^2 : d_1^2.$$

Ihre Massen aber verhalten sich wie die Quadrate der Durchmesser, gleiche Wärmemengen geben also Temperaturerhöhungen, die sich wiederum umgekehrt wie die Quadrate der Durchmesser verhalten. Wärmemengen also, die sich umgekehrt wie die Quadrate der Durchmesser verhalten, geben Temperaturerhöhungen, die sich umgekehrt wie die vierten Potenzen der Durchmesser verhalten. Demnach ist

$$t_1 : t_2 = d_2^4 : d_1^4.$$

Die Erwärmung dauert so lange fort, bis die Ausstrahlung im stande ist, die weitere Temperaturerhöhung zu verhindern. Die Ausstrahlung ist proportional der Oberfläche, also proportional dem Durchmesser. Daher gilt für die Schlufstemperatur der Satz:

$$t_1 : t_2 = d_2^3 : d_1^3.$$

Man könnte also, wenn man von der Ausstrahlung absieht, sich dahin ausdrücken, die Erwärmung sei umgekehrt proportional dem ganzen Trägheitsmomente $\left(\frac{\pi d^4}{32}\right)$ des Drahtquerschnitts, unter Einrechnung der Ausstrahlung dagegen, sie sei umgekehrt proportional dem polaren Querschnittsmodul oder Widerstandsmomente $\left(\frac{\pi d^3}{16}\right)$ des Drahtquerschnitts bezüglich der Festigkeit. Vgl. Ingen.-Math. I.

Wo Erwärmung des Drahtes nicht erwünscht ist, bedeutet sie einen Effektverlust, der ebenfalls vom Querschnitte des Drahtes abhängig ist, und zwar umgekehrt proportional dem Quadrate des Durchmessers. Dabei ist allerdings angenommen, dafs die Ausstrahlung proportional dem Temperaturüberschufs sei, eine Annahme, die höchstens annäherungsweise auf Gültigkeit Anspruch erheben kann.

Jedenfalls aber erkennt man, dafs dünne Drähte leicht zum Glühen, sogar zum Schmelzen gebracht werden können, während solche gröfseren Durchmessers bei demselben Strome verhältnismäfsig kalt bleiben.

Dasselbe Resultat ergiebt sich folgendermafsen. Die im Schliefsungsbogen sekundlich gelieferte Wärmemenge ist

$$Q = C W_1 J^2,$$

wo W_1 der Widerstand des Schliefsungsbogens, also z. B. $W_1 = \frac{l}{\frac{d^2}{4}\pi} c$ ist, wo l die Länge, d der Durchmesser, c eine Widerstands- oder Leitungskonstante ist. Die Gleichung geht also über in

$$Q = \frac{4\, C J^2 l c}{d^2 \pi}.$$

Bei dem Temperaturüberschufs t über die Umgebung ist nach obiger Annahme für den stationären Zustand das Ausstrahlungs- oder Emissionsvermögen des Drahtes proportional der Gröfse t und der Oberfläche, also die ausgestrahlte Menge

$$Q_1 = d\pi l \varepsilon t,$$

wo ε eine vom Material des Drahtes und seiner Umgebung abhängige Konstante ist. Soll die Ausstrahlung Q_1 gleich der durch den Strom hervorgebrachten Wärme sein, so ist

$$d\pi l \varepsilon t = \frac{4\, C J^2 l c}{d^2 \pi}$$

zu setzen. Daraus folgt aber als Temperaturüberschufs

$$t = \frac{4\,CJ^2}{d^3\pi^2\varepsilon},$$

womit sich das obige Gesetz bestätigt. Der Temperaturüberschufs ist proportional dem Quadrate der Stromstärke und umgekehrt proportional der dritten Potenz des Drahtdurchmessers.

235) Erhaltung der Energie der Kette. Helmholtz hat zuerst den Satz ausgesprochen, dafs die gesamte im Strome erzeugte Wärmemenge proportional der durch die chemischen Prozesse in der Kette frei werdenden Wärme sein müsse. Ist also J die Intensität, Q die von dem (der Stromeinheit entsprechenden) chemischen Prozesse entwickelte Wärmemenge, so ist JQ_1 die durch den vorliegenden chemischen Prozefs entwickelte. Diese ist nach Helmholtz gleich der Jouleschen Menge CJE zu setzen, so dafs $CJE = JQ_1$ ist. Daraus folgt

$$CE = Q_1,$$

d. h. die elektromotorische Kraft ist proportional der durch die Stromeinheit chemisch entwickelten Wärmemenge.

Thomson spricht den Satz von der Erhaltung der Energie folgendermafsen aus:

Die elektromotorische Kraft eines elektrochemischen Apparats ist (in absolutem Mafse) gleich dem mechanischen Äquivalent der chemischen Aktion, der ein elektrochemisches Äquivalent der in dem Apparat enthaltenen Substanz unterliegt.

Man kann also elektromotorische Kräfte oder Potentialdifferenzen durch rein kalorimetrische Methoden bestimmen. Man kann sogar chemische Affinitätskräfte in absolutem Mafse ausdrücken.

Über die experimentelle Prüfung des Gesetzes vergleiche man die Lehrbücher, ebenso über alles das, was von dem elektrischen Lichtbogen, seiner Temperatur und Leuchtkraft, vom Glühlicht, von der Anwendung auf Entzündung von Minen, über elektrisches Löten und Schweifsen, über Galvanokaustik u. dgl. gesagt ist.
