UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

228) Kirchhoffsche Sätze über Stromverzweigung

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

Visual Library

$$J_1 = \varkappa F_1 \frac{V_2 - V_1}{l_1}, \quad J_2 = \varkappa F_2 \frac{V_2 - V_1}{l_2}, \quad J_3 = \varkappa F_3 \frac{V_3 - V_1}{l_3}.$$

Nach vorigem Abschnitt sind aber die Widerstände in den Drähten

$$W_1 = \frac{l_1}{\varkappa F_1}, \quad W_2 = \frac{l_2}{\varkappa F_2}, \quad W_3 = \frac{l_3}{\varkappa F_3},$$

also ist auch

$$J_1 = \frac{V_2 - V_1}{W_1}, \quad J_2 = \frac{V_2 - V_1}{W_2}, \quad J_3 = \frac{V_2 - V_1}{W_3}.$$

Demnach ist

$$J_1 : J_2 : J_3 = \frac{1}{W_1} : \frac{1}{W_2} : \frac{1}{W_3}.$$

Folglich gilt der Satz: Bei jeder Stromverzweigung verhalten sich die Stromstärken wie die umgekehrten Werte der Widerstände in den Einzeldrähten. Man kann auch schreiben:

$$\boldsymbol{J_1 W_1 + J_2 W_2 + J_3 W_3 = 0.}$$

Dabei ist die Gesamtstärke wieder

$$J = J_1 + J_2 + J_3.$$

Soll man die drei Drähte durch einen einzigen so ersetzen, dafs aufserhalb $A_1 A_2$ sich nichts ändert, so ist sein Widerstand W so zu wählen, dafs die Stromstärke

$$\frac{V_2 - V_1}{W} = \frac{V_2 - V_1}{W_1} + \frac{V_2 - V_1}{W_2} + \frac{V_2 - V_1}{W_3}$$

wird. Es mufs also sein.

$$\frac{1}{W} = \frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} + \frac{1}{W_3},$$

der Ersatzdraht mufs demnach einen Widerstand haben, dessen umgekehrter Wert gleich der Summe der umgekehrten Werte der Einzelwiderstände ist.

Aus $J = \frac{V_2 - V_1}{W}$, $J_1 = \frac{V_2 - V_1}{W_1}$ folgt zugleich $\frac{J}{J_1} = \frac{W_1}{W}$. Für die Strömungen und Widerstände im Ersatzdraht und in den Einzeldrähten gelten also die Gleichungen

$$\frac{J}{J_1} = \frac{W_1}{W}, \quad \frac{J}{J_2} = \frac{W_2}{W}, \quad \frac{J}{J_3} = \frac{W_3}{W},$$

d. h. die betreffenden Stromstärken verhalten sich umgekehrt wie die Widerstände.

228) Die Kirchhoffschen Sätze über Stromverzweigung. a) Treffen bei stationärer Strömung mehrere Drähte in einem

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Punkte A zusammen, so mufs die Summe der Stromstärken gleich Null sein. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so würde sich in dem Punkte positive oder negative Elektrizität anhäufen, so dafs von stationärem Zustande keine Rede sein könnte. (Fig. 160.)

Fig. 160.

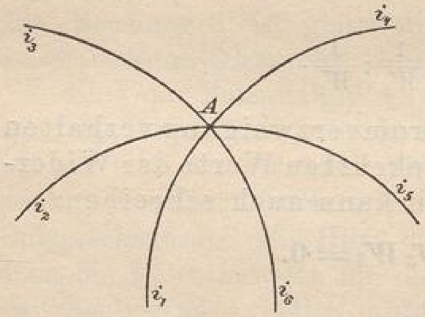
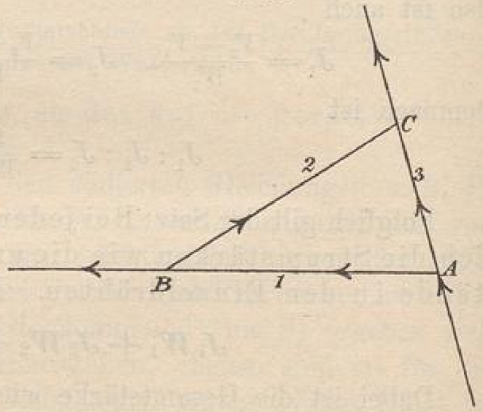


Fig. 161.



b) Durch drei Punkte A, B und C (Fig. 161) mögen Drähte gehen und so ein geschlossenes Dreieck bilden, in dessen Ecken Elektrizität zu- bezw. abströmt. Die Strömung sei eine stationäre, so dafs das Potential an jeder Stelle konstant bleibt. Scheidungskräfte, welche Potentialstürze U_a, U_b, U_c geben, mögen in A, B und C wirken. Auf dem ersten Draht sei in A der Potentialwert V_1, er verwandelt sich bei B in $V_1 + G_1 l_1$, wenn G_1 das Gefälle, l_1 die Länge ist, beim Übergange auf den zweiten Draht entsteht aber das Potential

1) $$V_1 + G_1 l_1 - U_b = V_2,$$

welches bis C hin sich in $V_2 + G_2 l_2$ verwandelt. Der Übergang auf den dritten Draht giebt

2) $$V_2 + G_2 l_2 - U_c = V_3.$$

Dies verwandelt sich bis A hin in $V_3 + G_3 l_3$. Der Übergang nach A mufs aber das alte Potential V_1 wiedergeben, wie es der stationäre Charakter verlangt, d. h. es ist

3) $$V_3 + G_3 l_3 - U_a = V_1.$$

Durch Addition bilde man aus den drei Gleichungen eine neue. Diese wird

4) $$G_1 l_1 + G_2 l_2 + G_3 l_3 = U_a + U_b + U_c.$$

Nun ist im ersten Drahte die Stromstärke $J_1 = \varkappa_1 F_1 G_1$, wenn F_1 sein Querschnitt ist. Zugleich ist nach Ohm der Widerstand in ihm

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$W_1 = \frac{l_1}{\varkappa_1 F_1}$. Bildet man das Produkt, so folgt $J_1 W_1 = l_1 G_1$. Entsprechendes gilt für die anderen Drähte. Einsetzung des Wertes von $l_1 G_1$ in die Gleichung 4) giebt schliefslich

$$J_1 W_1 + J_2 W_2 + J_3 W_3 = U_a + U_b + U_c.$$

Man übersieht leicht, dafs diese Gleichung ganz allgemein gilt, wenn Drähte ein geschlossenes Polygon bilden, auch wenn beliebige andersliegende Stellen mit Scheidungskräften und Potentialstürzen angebracht werden. Demnach lautet der zweite Kirchhoffsche Satz folgendermafsen:

Bilden Drähte eine geschlossene Figur und findet in ihnen eine stationäre Strömung statt, so ist die Summe der elektromotorischen Kräfte (d. h. der Potentialdifferenzen an den Scheidungsstellen) gleich der Summe der Produkte aus den Stromstärken und Widerständen in den einzelnen Drähten.

Sind keine Scheidungskräfte vorhanden, so ist

$$J_1 W_1 + J_2 W_2 + J_3 W_3 = 0.$$

In dieser Form enthält der Satz den vorigen als besonderen Fall in sich. Man hat nur nötig, das Vieleck auf einen Punkt zurückzuführen.

Durch die von Ohm und Kirchhoff aufgestellten Gesetze ist die rechnende Theorie der Ströme zu einem gewissen Abschlusse gebracht. Bei Kirchhoff handelt es sich besonders um die Theorie der Nebenschlüsse. Nach seinem ersten Gesetze ist klar, dafs, wenn ein Draht sich in zwei Teile spaltet und in dem einen Teile sich ein grofser Widerstand befindet, der Hauptteil des Stromes durch den andern Draht geht, denn die Stromstärken sind umgekehrt proportional den Widerständen. Wie dies bei der Differentiallampe und anderen Vorrichtungen Anwendung findet, darüber vergleiche man die Lehrbücher, ebenso über die höchst wichtigen Widerstandsvergleichungen. Auch erkennt man, dafs es möglich ist, starke Ströme dadurch zu messen, dafs man nur $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ davon durch Nebenschlüsse in einen Draht leitet und den schwächeren Strom am Galvanometer mifst. Nur um einige Beispiele anzudeuten, geben wir hier einen Einblick in die Lehre von den Strombrücken.

229) Brücke von Wheatstone. Ein Strom von der Intensität J verzweige sich so, wie es Fig. 162 darstellt. Nach dem ersten Kirchhoffschen Satze gelten für die Punkte A, B, C, D, wenn man die ankommenden Ströme positiv, die abgehenden negativ einsetzt, die Gleichungen

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN