Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

Kapitel XII. Magnetismus.

Kapitel XII.

Magnetismus.

236) Grundbegriffe. Unter Hinweis auf die gebräuchlichen Lehrbücher der Elementarphysik mögen zunächst die wesentlichen Grundanschauungen über den Magnetismus kurz zusammengestellt werden.

a) Jeder Magnetstab ist polarisiert. Die Stellen, von denen die magnetischen Kräfte hauptsächlich auszugehen scheinen, bezeichnet man als Nord- und Südpol. Um einfache Veranschaulichungen zu gewinnen, betrachtet man diese Stellen oft als Punkte, den Stab als eine gerade Linie. Gleichnamige Pole stofsen einander ab, ungleichnamige ziehen einander an, Nord- und Südmagnetismus verhalten sich also wie entgegengesetzte elektrische Ladungen isolierter Konduktoren. Die Menge der hypothetischen magnetischen Materie, die als Ladung eines Poles ebenso wirken würde, wie der Pol eines wirklichen Magnets, nennt man die Polstärke. Die magnetischen Wirkungen nehmen mit wachsender Polstärke zu, mit zunehmender Entfernung ab.

b) Zerbricht man einen Magnetstab in der Mitte, so erhält man nicht zwei Stäbe mit alleinigem Nord- bezw. Südmagnetismus, sondern zwei polarisierte Magnetstäbe, jeden von etwa derselben Polarstärke wie vorher. Fortsetzung der Teilung führt auf die Annahme, jeder Magnetstab bestände aus einer Reihe polarisierter Molekularmagnete. Eine der in Fig. 75 oder 101 dargestellten Molekülreihen veranschaulicht dies in hinreichender Weise, nur hat man statt + und — die Zeichen N und S für Nord- und Südmagnetismus einzuschreiben.

c) Auch der Erdkörper verhält sich wie ein Magnet. Der Umdrehung entsprechend (die selbst eine Art von Polarisation bedeutet) hat man die Pole in der Nähe der geographischen Pole zu suchen, wenn die Polarisation als regelmäfsig angenommen wird. Kompafs, magnetische Meridiane und ihre Orthogonalkurven, magnetischer Nord- und Südpol sind in den Lehrbüchern besprochen. Der Erdmagnetismus veranlafst bei schwimmenden Magneten nicht eine fortschreitende Bewegung, sondern nur eine Drehungsbewegung und eine der Polarisation entsprechende Einstellung nach einer Reihe von Schwankungen. Demnach wirkt auf den Magnet ein bloſses Kräftepaar. Da die Summe der beiden Resultanten gleich Null ist, muſs man annehmen, beide Pole des Magnets seien von gleicher Polstärke.

d) Daſs die beiden Resultanten an den Polen anzugreifen scheinen, erklärt sich folgendermaſsen. Die entgegengesetzten Magnetismen benachbarter Moleküle heben einander auf. Nur die an den Stabenden liegenden Magnetismen werden nicht neutralisiert und geben die entgegengesetzten Kräfte des Kräftepaars für die erdmagnetische Einwirkung. Ist jede der beiden Kräfte absolut genommen gleich p, so ist pl das Moment in der Lage Ost-West. Ist allgemeiner α die Abweichung von der Normalstellung Nord-Süd, so ist das drehende Moment gleich $pl \sin\alpha$. Daraus folgt für $\alpha = 0$ bezw. $\alpha = 180^0$ die stabile und die labile Gleichgewichtslage.

Der schwimmende Magnet zeigt aber nur die Horizontalkomponente der Kräfte an. Magnetisiert man eine Stahlnadel, die ursprünglich bei horizontaler Achsenlagerung sich horizontal einstellte, so senkt sie sich mit der Nordspitze auf der nördlichen Halbkugel der Erde um einen Winkel β nach unten. Statt p ist daher $\frac{p}{\cos\beta}$ als der wahre Wert der erdmagnetischen Kraftwirkung anzunehmen. Die Inklination β ist dieselbe in allen Punkten der sogenannten Isoklinen, wozu man die Karten über den Erdmagnetismus vergleichen möge.

Ist m die Polstärke des Magnetstabes, l seine Länge, so bezeichnet man den Ausdruck $M = ml$ als sein magnetisches Moment. Aus diesem leitet sich z. B. das Maximum der erdmagnetischen Wirkung ab. Die Gröſse der letzteren läſst sich mit Hilfe der horizontalen Pendelbewegungen des Stabes (Kompaſs) nach später zu erörternder Methode bestimmen. Vorläufig sei nur gesagt, daſs, je stärker der Erdmagnetismus wirkt, um so schneller die Schwingungen sind. Die Linien auf der Erdoberfläche, die alle Punkte gleicher Intensität des Erdmagnetismus verbinden, heiſsen die Isodynamen.

An verschiedenen Stellen der Erdoberfläche weicht die Einstellung der Magnetnadel vom geographischen Meridian in verschiedenem Maſse ab. Die Linien, welche Orte gleicher Abweichung miteinander verbinden, heiſsen die Isogonen.

e) Weiches Eisen läſst sich leicht magnetisieren. Dies kann z. B. durch regelmäſsiges Streichen mit einem Stahlmagnet geschehen. Da dieser dabei von seiner Kraft nichts einbüſst, so ist anzunehmen, daſs die beiden Arten des Magnetismus im Eisen bereits vorhanden waren. Während aber die Elektrizität im Eisen wandern kann, ist der Magnetismus an die Moleküle des Eisens gebunden, ähnlich wie die Elektrizitäten an die Moleküle des Dielektrikums. Entweder sind also bereits polarisierte Moleküle in die gesetzmäfsige Lage gedreht worden, oder es hat durch Verschiebung der magnetischen Massen in jedem Molekül eine Polarisierung stattgefunden. Das Magnetisieren kann auch durch Induktion oder Influenzwirkung eines Magnets auf weiches Eisen geschehen. Dabei ist die Stärke der Polarisierung proportional der Polstärke des wirkenden Magnetstabes, aufserdem nimmt sie mit zunehmender Entfernung beider Stäbe ab. Andere Magnetisierungsarten sind ebenfalls aus den Lehrbüchern bekannt.

Über die Abhängigkeit magnetischer Wirkungen von der gegenseitigen Entfernung zweier Pole muſs hier besonders gesprochen werden. Die nötigen Bemerkungen über Schwingungsbewegungen sind vorauszuschicken.

237) Schwingungszahl der Magnetnadel im homogenen Felde des Erdmagnetismus. Die Elementarmechanik zeigt, dafs das mathematische Pendel für die einfache Schwingung die Zeitdauer

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{ml^2}{mlg}} = \pi \sqrt{\frac{T}{gM}}$$

nötig hat, wo T das Trägheitsmoment, M das statische Moment des Massenpunktes in Bezug auf den Drehungspunkt bedeutet. Bei mehreren Massenpunkten in beliebiger Anordnung handelt es sich um

$$t = \pi \sqrt{\frac{T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n}{g(M_1 + M_2 + \ldots M_n)}} = \pi \sqrt{\frac{T}{gM}},$$

wenn T die Summe der Trägheitsmomente, M die Summe der statischen Momente der Massen bedeutet. Versteht man jedoch unter M nicht das Moment der Masse, sondern das Maximalmoment der Schwerkraft, die an dieser wirkt, so handelt es sich um $t = \pi \sqrt{\frac{T}{M}}$. Dabei ist der Abstand der Drehungsachse vom Massenschwerpunkt als horizontal liegend angenommen.

Ganz ebenso ist die Schwingungsdauer einer Magnetnadel $t = \pi \sqrt{\frac{T}{M}}$, wenn T das Trägheitsmoment der Nadel in Bezug auf die senkrechte Drehungsachse, $M = pl$ das Maximum des Drehmomentes ist, welches der Erdmagnetismus auf die Nadel (in der Ost-Westlage) ausübt. Ist n die Anzahl der Schwingungen in der Sekunde, also $n = \frac{1}{t}$, so folgt $n = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{pl}{T}}$, und hieraus ergiebt sich für die auf dem Nord- beziehungsweise Südpol wirkende Kraft des Erdmagnetismus als absoluter Wert der Horizontalkomponente

$$p = \frac{\pi^2 T}{l} n^2 = \varkappa \cdot n^2.$$

Die Horizontalkomponente des Erdmagnetismus ist also proportional dem Quadrate der Anzahl der sekundlichen Schwingungen.

Das genannte Gesetz ermöglicht nicht nur die Bestimmung des Erdmagnetismus, sondern es führt auch auf das Newton-Coulombsche Gesetz. Nachdem dieses behandelt ist, soll noch einmal von diesen Pendelschwingungen gesprochen werden.

238) Das Newton-Coulombsche Gesetz. Will man mit Hilfe der Magnetnadel die Stärke eines Poles messen, so ist die Einwirkung des Erdmagnetismus zu berücksichtigen. Ist die Nadel in richtiger Lage zur Ruhe gekommen und nähert man ihrem Nordpol den Südpol eines im magnetischen Meridian gelagerten Magnetstabes von Norden her, so summieren sich die Wirkung p des Erdmagnetismus und die des Stabes p_1. Läfst man also die Nadel schwingen, so wird jetzt

$$p + p_1 = \frac{\pi^2 T}{l} n_1^2 = \varkappa n_1^2,$$

also

$$p_1 = \varkappa n_1^2 - p = \varkappa \left(n_1^2 - n^2\right).$$

Für eine andere Lage hat man

$$p_2 = \varkappa n_2^2 - p = \varkappa \left(n_2^2 - n^2\right).$$

Durch Division folgt

$$p_1 : p_2 = \left(n_1^2 - n^2\right) : \left(n_2^2 - n^2\right).$$

Coulomb fand nun durch direkte Messung, dafs für zwei Entfernungen r_1 und r_2 der einander genäherten Pole mit hinreichender Genauigkeit die Schwingungen das Gesetz

$$r_2^2 : r_1^2 = \left(n_1^2 - n^2\right) : \left(n_2^2 - n^2\right)$$

ergaben. Aus beiden Proportionen folgte

$$p_1 : p_2 = r_2^2 : r_1^2.$$

So ergiebt sich, dafs die Einwirkung zweier Pole aufeinander umgekehrt proportional dem Quadrate der gegenseitigen Entfernung ist.

Hansteen und Gaufs haben weit genauere Methoden angewandt, die Geltung des Newton-Coulombschen Gesetzes zu beweisen. (Man vergl. dazu z. B. Wüllner, III Seite 91 bis 107.) Hier ist auf die gegenseitige Einwirkung sämtlicher Molekularmagnete aufeinander nicht hinreichende Rücksicht genommen. Trotzdem soll von jetzt ab die gegenseitige Einwirkung zweier magnetischer Massen m_1 und m_2 aufeinander als

$$p = \varkappa \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

bezeichnet werden. Setzt man hier $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ und $r = 1$, und mifst man die zugehörige Einwirkung p_1, so ist die Konstante $\varkappa = p_1$ bestimmt, und nun kann mit magnetischen Kräften gerechnet werden. Vor allem ist damit gezeigt, dafs das Potential eines magnetischen Poles m, bezogen auf einen in der Entfernung r befindlichen Pol von Polstärke 1

$$V = \varkappa \frac{m}{r}$$

ist. Die entsprechende Anziehung ist absolut genommen von der Gröfse $\varkappa \frac{m}{r^2}$, diese soll als Feldstärke in der betreffenden Entfernung bezeichnet werden. Wie früher, so ist auch hier

$$p = \varkappa \frac{m}{r^2} = \varkappa \frac{V_1 - V_2}{w},$$

wo V_1 und V_2 benachbarte Potentialwerte sind, während w der normal gemessene Abstand der zugehörigen Niveauflächen an der betreffenden Stelle ist.

Wählt man die magnetische Masseneinheit so, dafs $\varkappa$ gleich 1 ist, so kann man $\varkappa$ weglassen. Wir wollen also unter magnetischer Masseneinheit diejenige Menge magnetischer Masse verstehen, die auf eine gleich grofse magnetische Masse in der Entfernung 1 cm die Kraft 1 Dyne ausübt. Jetzt ist $1 = \varkappa \frac{1 \cdot 1}{1^2}$, d. h. $\varkappa = 1$.

239) Kraftlinien und Niveauflächen. Für mehrere punktförmige Pole von den Massen (Polstärken) $m_1, m_2, m_3, \ldots$ ist das Potential wiederum

$$V = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \cdots = \sum \frac{m}{r},$$

die Niveauflächen haben die Gleichung

$$V = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \cdots = c.$$

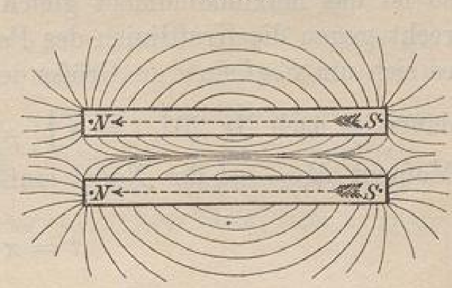
Bei Anordnung der Punkte in einer Ebene ist die Gleichung der Kraftlinien gegeben durch

$$m_1 \cos \vartheta_1 + m_2 \cos \vartheta_2 + m_3 \cos \vartheta_3 + \cdots = c.$$

Unter den Polen können auch solche von negativer Polstärke sein.

Je länger und dünner ein Magnetstab ist, umsomehr hat man das Recht, von punktförmigen Polen zu sprechen. Bei den in der Praxis üblichen Magnetstäben zeigen sich, wie die bekannten Versuche mit Eisenfeilspänen oder Magnetnadeln nachweisen, schon erhebliche Abweichungen gegen die früher behandelte Gestalt der Niveau- und Kraftlinien. So müfsten z. B. die Kraftlinien für einen Magnetstab ebenso, wie für einen Hufeisenmagnet, der Form der Fig. 70 folgen, in Wirklichkeit fallen sie so aus, wie die verschiedenen Lehrbücher sie darstellen. Ebenso müfsten die Kraft- und Niveaulinien zweier gleich starker Nordpole parallel und gleichgerichteter Magnetstäbe in jedem Meridianschnitt der Zeichnung 65 entsprechen. In Wirklichkeit ist dies nicht genau genug der Fall. Ähnlich ist es mit Magnetstäben, deren Achsen in dieselbe Gerade fallen und deren Nordpole einander genähert werden.

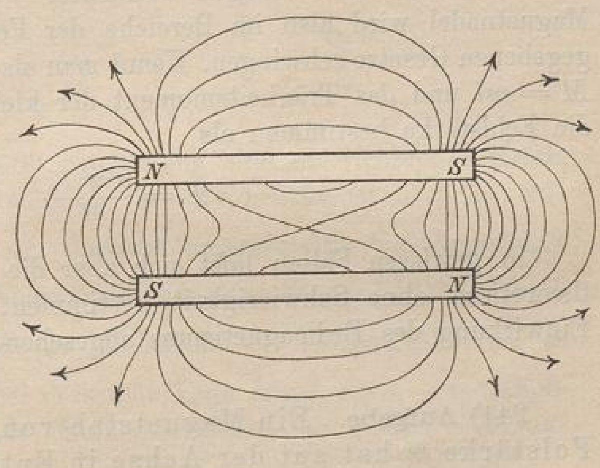
Fig. 165.



Immerhin bleibt alles bestehen, was vorher über das Verhalten der Kraftlinien in abgekürzter Redeweise gesagt war. Gleichgerichtete Kraftlinien stofsen einander ab, entgegengesetzt gerichtete ziehen einander an.

In Fig. 165 ist angedeutet, wie zwei gleichgerichtete Magnetstäbe sich in dieser Hinsicht verhalten. Entfernt man die Drähte voneinander, so treten auch die zusammengedrängten Kraftlinien des zwischen beiden befindlichen Raumes wieder auseinander.

Fig. 166.



In Fig. 166 dagegen ist gezeigt, wie bei entgegengesetzt gerichteten Magnetstäben die im Zwischenraume befindlichen Kraftlinien auseinander getreten sind. Die des einen sind teilweise mit denen des anderen verschmolzen. Ein Grenzpaar durchkreuzt sich. Entfernt man die Stäbe voneinander, so trennt sich dieses Paar, und ein Nachbarpaar übernimmt seine Rolle. Ein Hin- und Herbewegen bringt also wechselnde Vereinigungen und

Abschnürungen hervor. Ein ähnliches Abschnüren der Kraftlinien erfolgt bei den Hertzschen Schwingungen. (Siehe unten.)

Es ist lehrreich, die mathematische Konstruktion der Kraftlinien für den Fall der Punktpole bei solcher Lagerung durchzuführen und die Kurven mit den praktisch gefundenen Linien zu vergleichen.

240) Schwingungen der Magnetnadel im magnetischen Felde. Ist ein homogenes Feld von der Feldstärke $+F$, so heifst dies, dafs an jeder Stelle auf die Einheit des entgegengesetzten Magnetismus die anziehende Kraft F ausgeübt wird, auf m solcher Einheiten dagegen die Kraft Fm. Hat nun die Magnetnadel von Polstärke m die Länge l, so ist das Maximalmoment gleich Fml. Dabei steht die Nadel senkrecht gegen die Kraftlinien des Feldes. In jeder anderen Lage handelt es sich um $Fml \sin \alpha$ als Gröfse der Direktionskraft. Die Schwingungsdauer ist nach Nr. 237 $t = \pi \sqrt{\frac{T}{Fml}}$, oder wenn man das magnetische Moment $M = ml$ der Nadel einführt,

$$t = \pi \sqrt{\frac{T}{MF}},$$

die Schwingungszahl für die Sekunde also

$$n = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{MF}{T}}.$$

Nun kann im allgemeinen jedes magnetische Feld für einen sehr kleinen Bezirk als homogen betrachtet werden. Eine sehr kleine Magnetnadel wird also im Bereiche der Feldstärke F nach dem angegebenen Gesetze schwingen. Kennt man also das magnetische Moment $M = ml$ und das Trägheitsmoment der kleinen Nadel, so kann man die Feldstärke bestimmen als

$$F = \frac{n^2 \pi^2 T}{M}.$$

In gewissen Fällen läfst sich aber die Stärke eines Feldes auch theoretisch ohne Schwierigkeit bestimmen, wenn zunächst von der Einwirkung des Erdmagnetismus abgesehen wird.

241) **Aufgabe.** Ein Magnetstab von der Länge $2l$ und der Polstärke m hat auf der Achse in Entfernung r vom Mittelpunkte welche Feldstärke?

Auflösung. Die Feldstärke bestimmt sich aus der Differenz der Feldstärken der beiden Pole, da die Kraftrichtungen in dieselbe Gerade fallen. Es ist demnach

$$F = F_2 - F_1 = \frac{m}{(r-l)^2} - \frac{m}{(r+l)^2} = m\,\frac{(r+l)^2-(r-l)^2}{(r^2-l^2)^2} = \frac{4\,mrl}{(r^2-l^2)^2}$$

$$= \frac{4\,mrl}{r^4\left(1-\frac{l^2}{r^2}\right)^2} = \frac{4\,ml}{r^3\left(1-\frac{l^2}{r^2}\right)^2}.$$

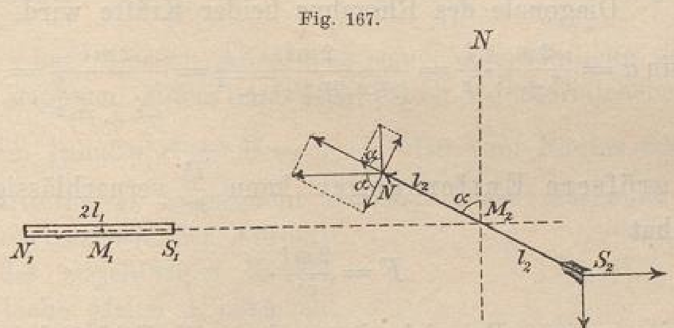
In gröſserer Entfernung kann man $\frac{l^2}{r^2}$ vernachlässigen. Dort wird also

$$F = \frac{4\,ml}{r^3},$$

d. h. dort ist die Feldstärke umgekehrt proportional der 3ten Potenz der Entfernung, nimmt also sehr schnell ab. (Vgl. Störungsgesetz.)

242) **Aufgabe.** Eine kleine Magnetnadel von der Länge $2l_2$ und der Polstärke m_2 befinde sich auf der Achse eines Magnetstabes von der Länge $2l_1$ und der Polstärke m_1, und zwar in der (groſsen) Entfernung r von der Mitte. Um wieviel wird sie aus der normalen Stellung abgelenkt, wenn der Stab senkrecht gegen den magnetischen Meridian liegt?

Fig. 167.



Auflösung. Bei gröſserer Entfernung sind die richtenden Kräfte als parallel zur Achse anzunehmen. Die Feldstärke ist nach Nr. 241 als $\frac{4\,m_1 l_1}{r^3}$ anzunehmen, bei der durch α angedeuteten Gleichgewichtsstellung also ist das die Nadel richtende Moment des Stabes gleich $\frac{4\,m_1 l_1}{r^3}\,m_2 l_2 \cos\alpha$. Ist nun E die Feldstärke des Erdmagnetismus, so ist ihr richtendes Moment bei derselben Lage $E m_2 l_2 \sin\alpha$. Im Gleichgewichtszustande sind beide Momente gleich zu setzen. Daraus ergiebt sich

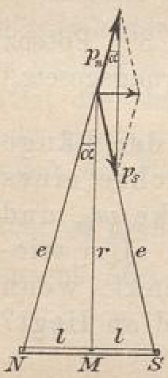
$$\tan\alpha = \frac{4\,m_1 l_1}{E r^3}.$$

Bemerkung. Man kann die letztere Formel, bei der Länge und Polstärke der Nadel gleichgültig sind, benutzen, um mit Hilfe der bekannten Feldstärke des Erdmagnetismus die Polstärke von Magnetstäben zu bestimmen. Ist $E = 0{,}2$, so ergiebt sich als Polstärke des Magnetstabes

$$m_1 = \frac{0{,}2\, r^3}{4\, l_1} \tan\alpha.$$

[Im Jahre 1893 war für Mitteleuropa unter 50° nördlicher Breite und 15° östl. von Greenwich E, in Einheiten des Centimeter-Gramm-Sekundensystems gemessen, gleich 0,198. Anfangs 1896 war der Wert von E in Wien 0,2065, in Paris 0,1942, in Berlin gleich 0,183. Die jährliche Zunahme ist durchschnittlich 0,00015. Über die Bestimmung von E vergleiche die Lehrbücher.]

Fig. 168.



243) **Aufgabe.** Die Feldstärke eines Magnetstabes für die Entfernung r auf seinem magnetischen Äquator zu bestimmen.

Auflösung. Der Nordpol giebt $p_n = \frac{m}{e^2} = \frac{m}{r^2 + l^2}$, der Südpol ein ebenso grofses p_s. Die horizontale Diagonale des Rhombus beider Kräfte wird

$$p = 2\,p_n \sin\alpha = \frac{2\,m}{r^2 + l^2} \cdot \frac{l}{e} = \frac{2\,ml}{(r^2 + l^2)\sqrt{r^2 + l^2}} = \frac{2\,ml}{(r^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\,ml}{r^3\left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Für gröfsere Entfernungen kann $\frac{l^2}{r^2}$ vernachlässigt werden, und man hat

$$F = \frac{2\,ml}{r^3}.$$

Wie im vorigen Beispiel nimmt dort die Feldstärke umgekehrt proportional der 3ten Potenz der Entfernung ab.

244) **Aufgabe.** Die Feldstärke eines kleinen Magnetstabes für einen beliebigen Punkt zu finden.

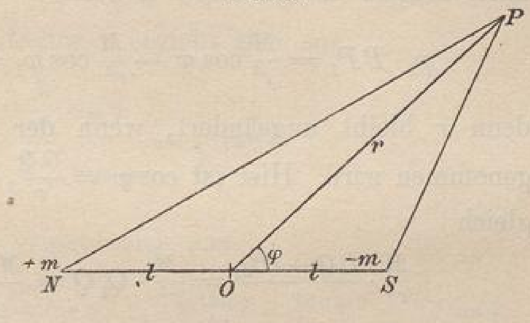
Erste Auflösung. Auf dem Wege von Nr. 86 ergiebt sich p, wenn r_1 und r_2 die Entfernungen des Punktes von den beiden Polen sind, aus

$$p^2 = \frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4} - \frac{2\cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{r_1^2 r_2^2}.$$

Auch die Richtung ist auf dem dortigen Wege leicht zu bestimmen. Setzt man $p = c$, so hat man die Gleichung der Linien gleicher Feldstärke (Intensität) für das in Nr. 92 behandelte Problem. Um jedoch an Potentialbetrachtungen zu gewöhnen, wird noch eine zweite Lösung gegeben.

Zweite Auflösung. Das Potential in P ist die Arbeit, die man nötig hat, um die magnetische Poleinheit von dort in den Bereich zu bringen, wo der Potentialwert gleich Null ist. Diesen Wert erreicht man aber auch dadurch, dafs man z. B. S unter der Gegenwirkung der Menge 1 in P allein nach N bringt. Da es sich um einen kleinen Stab (Elementarmagnet) handeln soll, kann man $PS = PN = PO = r$ setzen. Von der

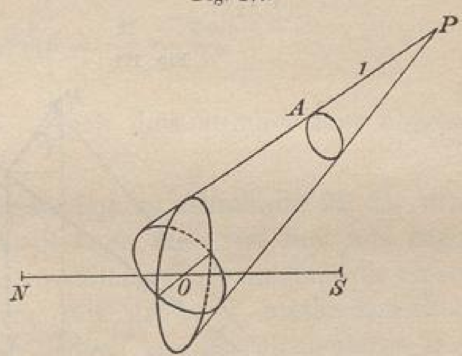
Fig. 169.



Gegenkraft $\frac{m}{r^2}$ ist nur die Horizontalkomponente $\frac{m}{r^2}\cos\varphi$ zu überwinden. Da der Arbeitsweg gleich $2l$ ist, handelt es sich um die Arbeit $\frac{m}{r^2}\cos\varphi\, 2l$. Hier ist $2ml$ das magnetische Moment M des Stabes, also ist der gesuchte Potentialwert angenähert gleich $V = \frac{M\cos\varphi}{r^2}$.

Man hat diesem Ausdrucke eine eigentümliche geometrische Deutung gegeben, indem man sich in der Äquatorialebene eine Kreisfläche vom Inhalte $r^2 = M = 2ml$, also vom Radius $r = \sqrt{\frac{M}{\pi}}$ mit O als Mittelpunkt angebracht dachte. Diese erscheint von P aus gesehen ebenso, wie der Normalschnitt des zugehörigen Kegels, dessen Fläche gleich $M\cos\varphi$ ist. Durch Reduktion auf die Entfernung $PA = 1$ erhält man den zugehörigen körperlichen Winkel $w = \frac{M\cos\varphi}{r^2} = V$. Also:

Fig. 170.



Der Potentialwert eines Elementarmagnets in einem beliebigen Punkte P ist gleich dem räumlichen Winkel, unter dem man von dort aus eine kreisförmige Hilfsfläche erblickt, die mit der Äquatorebene des Magnets zusammenfällt und deren Inhalt durch den Wert des magnetischen Moments dargestellt wird.

Aus diesem Ausdrucke mufs nun die Feldstärke nach Gröfse und Richtung abgeleitet werden. Sie kann in eine Komponente p_1 in der

Tangente des um O geschlagenen Kreises und in eine in den Radius fallende p_2 zerlegt werden. (Vgl. Fig. 171.) Bewegt man die Einheit von P aus in der Tangente um einen beliebigen Weg PP_1, so ist nach obigem die geleistete Arbeit

$$p_1 \cdot PP_1 = \frac{M}{r^2} \cos\varphi - \frac{M}{r^2} \cos\varphi_1 = \frac{M}{r^2} (\cos\varphi - \cos\varphi_1),$$

denn r bleibt ungeändert, wenn der willkürliche Weg sehr klein genommen wird. Hier ist $\cos\varphi = \frac{OQ}{r}$, $\cos\varphi_1 = \frac{OQ_1}{r}$, also die Arbeit gleich

$$\frac{M}{r^2} \cdot \frac{OQ - OQ_1}{r} = \frac{M}{r^3} \cdot Q_1 Q = \frac{M \cdot SP}{r^3} = \frac{M \cdot PP_1}{r^3} \sin\alpha.$$

Setzt man dies wieder gleich $p_1 \cdot PP_1$, so hebt sich der willkürliche Weg PP_1, und es bleibt als Komponente der Feldstärke bestehen

$$p_1 = \frac{M}{r^3} \cdot \sin\varphi.$$

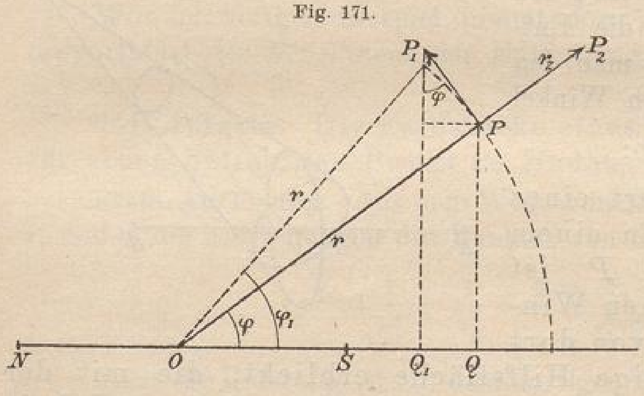
Bewegt man jetzt die Einheit auf dem Radius um eine willkürliche Strecke PP_2, so ist die Arbeit

$$p_2 \cdot PP_2 = \frac{M\cos\varphi}{r^2} - \frac{M\cos\varphi}{r_2^2} = M\cos\varphi \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)$$

zu leisten, denn jetzt bleibt φ umgeändert. Man kann dafür schreiben

$$M\cos\varphi \frac{r_2^2 - r^2}{r^2 r_2^2} = M\cos\varphi \frac{(r_2 + r)(r_2 - r)}{r^2 r_2^2} = M\cos\varphi \frac{r_2 + r}{r^2 r_2^2} PP_2.$$

Fig. 171.



Setzt man dies wieder gleich $p_2 \cdot PP_2$, so hebt sich der Weg PP_2 weg, und es bleibt stehen

$$p_2 = M\cos\varphi \frac{r_2 + r}{r^2 r_2^2}.$$

Nimmt man die willkürliche Länge des Weges unendlich klein, so kann man $r_2 = r$ setzen, an Stelle des Bruches tritt also $\frac{2r}{r^4} = \frac{2}{r^3}$, und es wird

$$p_2 = \frac{2M\cos\varphi}{r^3}$$

die andere Komponente. Die Resultante, d. h. die Feldstärke ergiebt sich als

$$1)\quad F = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \frac{M}{r^3}\sqrt{\sin^2\varphi + 4\cos^2\varphi} = \frac{M}{r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\varphi}.$$

Die Neigung gegen den Radius r ergiebt sich aus

$$\tan\alpha = \frac{p_1}{p_2} = \frac{\frac{M}{r^3}\sin\varphi}{\frac{2M}{r^3}\cos\varphi} = \frac{1}{2}\tan\varphi.$$

Die Neigung $\beta = \alpha + \varphi$ ergiebt sich aus

$$2)\quad \tan\beta = \tan(\alpha + \varphi) = \frac{\tan a + \tan\varphi}{1 - \tan\alpha\tan\varphi} = \frac{\frac{1}{2}\tan\varphi + \tan\varphi}{1 - \frac{1}{2}\tan\varphi\tan\varphi} = \frac{3\tan\varphi}{2 - \tan^2\varphi}.$$

Damit ist die Feldstärke für jeden Punkt nach Gröfse und Richtung bestimmt. Dabei ist zu bemerken, dafs nur die Gröfse von M abhängig ist, nicht aber die Richtung.

Für Punkte der Achse ist $\varphi = o$, also wird dort

$$p = \frac{M}{r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2 o} = \frac{2M}{r^3} = \frac{4ml}{r^3},$$

wie schon oben gezeigt war. Der zugehörige Potentialwert ist

$$\frac{M\cos o}{r^2} = \frac{2ml}{r^2}.$$

Für Punkte der Äquatorebene ist $\varphi = 90^0$. Dort wird

$$p = \frac{M}{r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2 90^0} = \frac{M}{r^3} = \frac{2ml}{r^3},$$

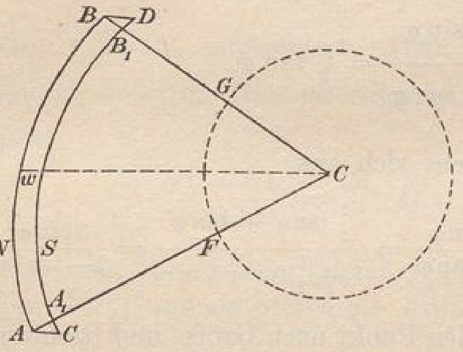
Der Potentialwert ist $\frac{M\cos 90^0}{r^2} = o$. Auch dies stimmt zum obigen Resultate.

Damit ist eine wesentliche Ergänzung zu Abschnitt 92 für den Fall kleiner Magneten gegeben. Auch kann man von hier aus dazu übergehen, das Potential einer Reihe von Elementarmagneten, die einen Stab von unendlicher Länge bilden, mit gröfserer mathematischer Strenge zu untersuchen. Dies würde jedoch aus der elementaren Behandlung heraustreten.

245) Magnetische Doppelschale oder Blatt. Der folgende Abschnitt macht es nötig, auch auf die Theorie der magnetischen Doppelschale einzugehen. Man versteht darunter eine sehr dünne Schale (Blatt), welche dadurch entsteht, dafs ein irgend wie gestaltetes

Stück einer krummen Fläche (Kalotte) einer Parallelverschiebung unterworfen wird, worauf die der Anfangslage entsprechende Fläche homogen mit Nordmagnetismus, die der Schlufslage entsprechende in derselben Dichte mit Südmagnetismus belegt wird. Ist z. B. 1 die Dichtigkeit der einen Belegung, so kann man die der andern mit -1 bezeichnen.

Fig. 172.



In Fig. 172 ist AB die mit Nordmagnetismus, A_1B_1 die mit Südmagnetismus belegte Fläche.

Auf die unendlich kleinen Teile AA_1C und BB_1D_1 braucht keine Rücksicht genommen zu werden. Die Länge des kleinen Verschiebungsweges sei w. Angenommen in C befände sich die Masseneinheit, so erfordert die Aufgabe, diese ins Unendliche zu entfernen, ebenso viel Arbeit, wie die, bei festgehaltenem C die Schale ins Unendliche zu entfernen. Angenommen, das Entfernen der Schale AB ins Unendliche erfordert die Arbeit A, dann erfordert das Entfernen der Schale A_1B_1 erstens die zur Verschiebung um w nötige Arbeit und aufserdem die Arbeit $-A$. Das Potential der Doppelschale ist also für einen Punkt C die Arbeit, die nötig ist, unter alleiniger Einwirkung der in C koncentrierten Masseneinheit die eine der beiden Schalen um die Strecke w zu verschieben. Denn A und $-A$ heben bei der Gesamtbewegung einander auf.

Man denke sich jetzt aus der Kalotte AB und dem Punkte C einen Kegel gebildet, aufserdem um C die Einheitskugel gelegt, so dafs ein geschlossener Raum $ABGF$ entsteht, dessen sämtliche Flächen in der Dichte 1 mit Masse belegt gedacht werden sollen. Nach dem Laplaceschen Satze erfährt dieser Raum durch die aufsen liegende Masse C die Spannung Null. Da die Seitenwände AF, BG u. s. w. dazu nichts beitragen, ist die auf die Fläche GF ausgeübte Abstofsung ebenso grofs, als die auf die Fläche AB einwirkende. Ist nun die Fläche $FG = \varphi$, d. h. der körperliche Winkel, unter dem AB gesehen wird, gleich φ, so ist die auf diese Fläche einwirkende Abstofsung, sobald der körperliche Winkel klein ist, gleich $\frac{\varphi}{1^2} = \varphi$. Da nun w unendlich klein zu denken ist, so ist die Anziehung auf A_1B_1 ebenfalls gleich φ, die zur Verschiebung von A_1B_1 um w nötige Arbeit ist also gleich φw, und ebenso grofs ist das Potential der kleinen Doppelschale in Bezug auf den Punkt C. Ist die Dichte der Belegung nicht 1, sondern δ, so ist das Potential gleich $\varphi\omega\delta$.

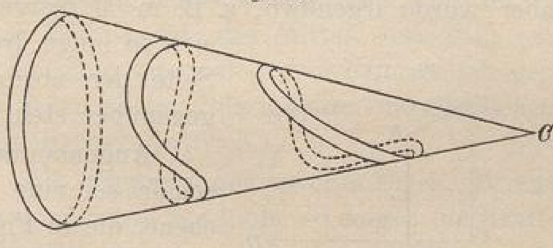
Ist die Schale grofs, so zerlege man sie in kleine Teile, deren körperliche Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ sein mögen. Nach Nr. 79 sind die Potentialwerte algebraisch zu addieren, so dafs man erhält

$$V = w\delta\,(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n) = w\delta\varphi,$$

wo φ die Summe der körperlichen Winkel bedeutet. Folglich:

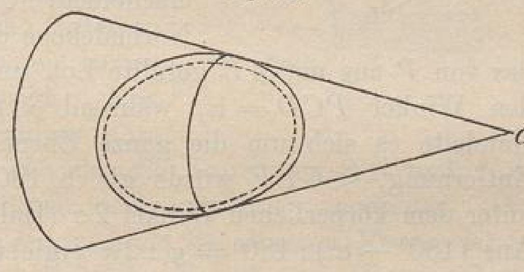
Das Potential einer magnetischen Doppelschale (oder eines magnetischen Blattes) in einem beliebigen Punkte ist gleich dem Produkte aus dem Abstande beider Schalen, der Dichte der Belegung und des körperlichen Winkels, unter dem sie von dem Punkte aus erscheint.

Fig. 173.



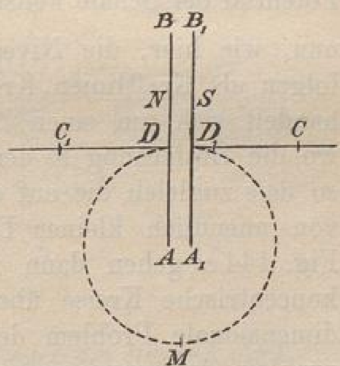
Der Potentialwert ist positiv oder negativ, je nachdem C auf der einen oder der andern Seite der Schale liegt.

Fig. 174.



Nun lassen sich durch einen Kegel Doppelschalen der verschiedensten Gestaltung begrenzen. Sämtliche haben für die Spitze C denselben Potentialwert (vgl. Fig. 173), sobald sie im gleichen Sinne belegt sind. Handelt es sich um eine geschlossene Fläche, die aufsen mit $+$, innen mit $-$ belegt ist, so ist, da von C aus gesehen die beiden Doppelschalen in ungleichem Sinne belegt sind, das Potential für C gleich Null. Vgl. Fig. 174. Dies zeigte sich z. B. bei gewissen Influenzproblemen.

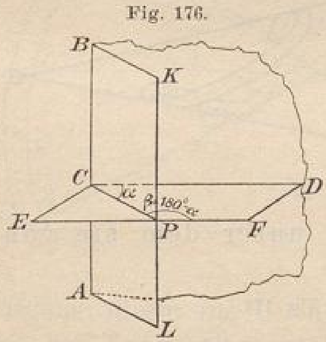
Fig. 175.



Die Doppelschale kann auch eben sein, z. B. kreisförmig. Läfst man dabei C z. B. nach D_1 rücken, so ist der körperliche Winkel gleich der Hälfte der Oberfläche der Einheitskugel, d. h. gleich $2 \cdot 1^2\pi = 2\pi$, also das Potential dort gleich $2w\delta\pi$. Auf der andern Seite bei D ist es gleich $-2w\delta\pi$, der Potentialunterschied für beide Punkte ist also gleich $4w\delta\pi$. Auf welchem Wege man auch die magnetische Einheit — ohne durch das Blatt selbst zu gehen — von D_1 nach D führe, stets ist die Arbeit $4 w \delta \pi$ nötig.

Angenommen, die nordmagnetische Einheit könnte sich auf dem skizzierten Kreise bewegen, so würde sie, nach D gebracht, im Kreise herum nach D_1 wandern. Angenommen ferner, die Schale könnte sich um eine Achse drehen, die im Halbierungspunkte von DD_1 auf der Ebene der Zeichnung senkrecht steht, die nordmagnetische Einheit aber würde irgendwo, z. B. in M festgehalten, so würde die Schale sich so lange drehen, bis die südmagnetische Seite der nordmagnetischen Einheit genau gegenüber steht.

Fig. 176.



Angenommen, die magnetische Doppelschale sei eine durch AB begrenzte Halbebene, die in Fig. 176 als in der Zeichnungsebene liegend dargestellt ist, so würde sie, von einem beliebigen Raumpunkte P aus gesehen, unter welchem körperlichen Winkel erscheinen? $CDFE$ sei die durch P gelegte Normalebene der Geraden AB, dann ist PC das von P aus auf AB gefällte Lot, und dieses bildet mit der Ebene den Winkel $PCD = \alpha$, während $\sphericalangle \beta = \sphericalangle CPF = 180^0 - \alpha$ ist. Handelte es sich um die ganze Ebene, so läge AB in unendlicher Entfernung, $\sphericalangle CPF$ würde gleich 180^0 sein, und die Ebene würde unter dem körperlichen Winkel 2π (Halbkugelfläche $2\pi 1^2$) erscheinen. Aus $(180^0 - \alpha^0) : 180^0 = \varphi : 2\pi$ ergiebt sich als körperlicher Winkel $\varphi = \frac{2\pi(180^0 - \alpha^0)}{180^0}$, oder wenn man Bogen statt der Winkel schreibt, $\varphi = \frac{2\pi\widehat{\beta}}{\pi} = \widehat{2\beta}$. Für alle Punkte der Ebene $ABKL$ ist demnach das Potential der Schale konstant gleich $w\delta 2\pi \frac{180^0 - \alpha^0}{180^0}$ oder $w\delta\widehat{2\beta}$. Sind nun, wie hier, die Niveauflächen ein Ebenenbüschel durch AB, so folgen als Kraftlinien Kreise, deren Mittelpunkte auf AB liegen. Es handelt sich um einen besonderen Fall der Fig. 144c, den nämlich, wo die Entfernung w der parallelen Ebenen verschwindend klein ist, so dafs zugleich die auf den Aufsenseiten lagernde Elektrizitätsmenge von unendlich kleiner Dichte ist. Die asymptotischen Kurven der Fig. 144c gehen dann in ein Strahlenbüschel, die Niveaulinien in koncentrische Kreise über. Es handelt sich zugleich um das zweidimensionale Problem der Doppellinie, d. h. um das Vertauschungsproblem des zweidimensionalen Punktproblems, so dafs sich hier ein neuer Übergang zum Gebiete des logarithmischen Potentials eröffnet. Durch die Abbildung $Z = \sqrt{z}$ erhält man das Vertauschungsproblem des lemniskatischen Zweipunktproblems, welches auf dieselben Orthogonalscharen führt, wie letzteres.

246) Para- und Diamagnetismus. Das von Faraday entdeckte Verhalten para- und diamagnetischer Körper zwischen zwei Polen wird in den Lehrbüchern dargestellt und hier als bekannt vorausgesetzt. Da ein und derselbe Körper bald para-, bald diamagnetisches Verhalten zeigt, je nach dem Mittel, in dem er sich befindet, so leuchtet ein, dafs ähnlich, wie bei der Elektrizität, das Mittel wesentlich am Vorgange beteiligt ist. Der Vorgang ist analog dem beim Aufsteigen oder Niedersinken desselben Körpers in Flüssigkeiten verschiedenen spezifischen Gewichtes. (Magnetischer Auftrieb.)

a) Paramagnetismus. Als Beispiel diene weiches Eisen. Bringt man solches in die Nähe eines kräftigen Nordpols, so zeigen die Kraftlinienversuche, dafs es die Kraftlinien an sich heran und zum Teil in sich hineinzieht, als ob es ein Südpol wäre. Es passieren demnach mehr Kraftlinien durch das Eisen, als durch das gleiche Volumen Luft bezw. den gleichen luftleeren Raum. Der Kraftflufs wird begünstigt. Man kann sich den Vorgang mechanisch versinnbildlichen. Der Punkt S zieht die Kraftlinien NA und NA_1 gewissermafsen an, er wird ebenso stark von ihnen angezogen. Die Anziehungen geben eine nach N gerichtete Resultante. Ebenso ist es mit je zwei anderen symmetrisch liegenden Kraftlinien. Eine ponderomotorische Anziehung findet nun wirklich statt, natürlich nicht durch geometrische Gebilde, sondern durch die Einwirkung der polarisierten Molekülreihen veranlafst. Das Eisen wird nach den Stellen hingezogen, wo die ursprünglich geradlinigen Kraftlinien dichter beisammen liegen.

Fig. 177.

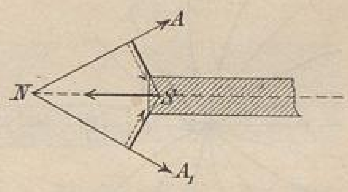
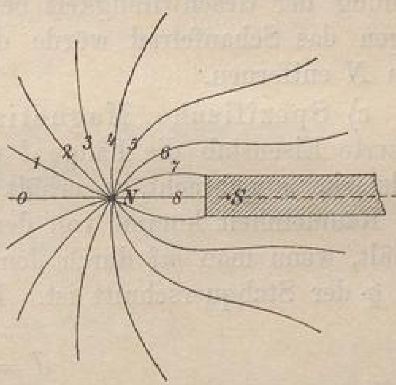


Fig. 178.

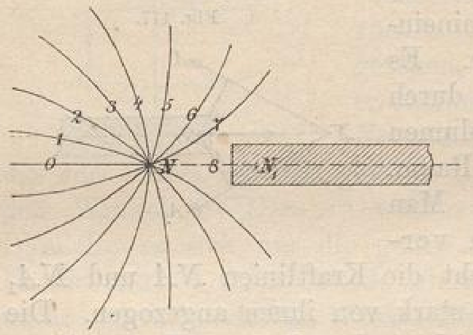


Denkt man sich die Pole punktförmig, so erhält man für die Kraftlinien Gestalten, wie sie in Fig. 76 und 77 veranschaulicht sind. In der Wirklichkeit nehmen sie etwa die in Fig. 178 skizzierte Form an. Normal gegen sie liegend sind die Niveauflächen des Potentials zu denken.

Eine hydrodynamische Analogie würde folgende sein. Man denke sich Wasser von N aus nach allen Richtungen strömend. An Stelle des Eisens denke man sich einen Kanal, in dem die Strömung z. B. durch ein Schaufelrad mechanisch unterstützt wird. Dadurch wird mehr Wasser in den Kanal eingesaugt, als ohne diese Unterstützung, die Stromlinien also werden so abgelenkt, dafs sie sich nach S hin zusammendrängen, wodurch zugleich die Geschwindigkeit verstärkt wird. Ist nun das Rad an den Kanalwänden befestigt, so will die Reaktion diese Wände in entgegengesetzter Richtung vorwärts treiben, wie es beim Dampfschiffe geschieht.

b) Diamagnetismus. Man nehme als Beispiel Wismut. Dieses stöfst in der Luft, ebenso im luftleeren Raume, die Kraftlinien von sich ab und wird ebenso von den Kraftlinien abgestofsen. Deutet man die Pfeile der Fig. 177 in entsprechender Weise um, so läfst sich der Vorgang mechanisch veranschaulichen. Das Wismut läfst also weniger Kraftlinien passieren, als die Luft oder der leere Raum. Denkt man sich die Pole als Punkte, so würden Figuren wie 72 und 75 mafsgebend werden. In der Wirklichkeit nehmen die Kraftlinien Gestalten an, wie sie in Fig 179 skizziert sind. Die hydrodynamische Veranschaulichung geschieht durch ein Schaufelrad, welches der Strömung entgegenwirkt, so dafs mehr Wasser aufserhalb des Kanals strömen wird. Die Stromröhren werden also durch die Wirkung des Wismuts bei diesem erweitert, was einer Verlangsamung der Geschwindigkeit beim Wasser entspricht. Die Reaktion gegen das Schaufelrad würde die beweglich gedachten Kanalwände von N entfernen.

Fig. 179.



c) Spezifische Magnetisierungsintensität. Hat der genäherte Eisenstab die Länge l und wird er durch Induktion auf die Polstärke m gebracht, so erhält er das magnetische Moment ml. Auf die Raumeinheit kommt von dem Momentwerte ein Betrag, den man erhält, wenn man ml durch den körperlichen Inhalt $K = ql$ dividiert, wo q der Stabquerschnitt ist. Diesen Betrag

$$1) \qquad J = \frac{ml}{ql} = \frac{m}{q}$$

bezeichnet man als die spezifische Magnetisierungsintensität.

d) Aufnahmefähigkeit oder Susceptibilität. Die Magnetisierungsintensität J ist, wie der Versuch lehrt, proportional der Feldstärke. Zugleich ist sie abhängig vom Material des Stabes. Man kann demnach auch setzen

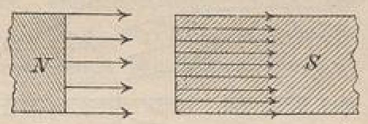
2) $$J = \varkappa F.$$

Hier bedeutet F die Feldstärke und $\varkappa$ eine jedem Material eigentümliche Konstante. Diese Konstante ist die der Aufnahmefähigkeit oder Susceptibilität des Materials.

e) Durchlafsfähigkeit oder Permeabilität. Der induzierte Stab läfst mehr bezw. weniger Kraftlinien durch, als der luftleere Raum. Dividiert man die erste Anzahl durch die zweite, so giebt der Bruch an, wieviel mal so grofs die Durchlafsfähigkeit des Materials ist, als die des leeren Raumes. Diese Zahl μ ist die Konstante der Durchlafsfähigkeit oder Permeabilität des Materials.

f) Zusammenhang zwischen $\varkappa$ und μ. Um den Zusammenhang zwischen Susceptibilität und Permeabilität aufzuklären denke man sich das ursprüngliche Feld homogen und von der Feldstärke F, so dafs durch den Querschnitt q die Kraftröhren in der Anzahl qF passieren, durch die Flächeneinheit selbst in der Anzahl F. Auch das Feld im induzierten Material, z. B. im Eisen, betrachte man als homogen. Nach 1) ist die Polstärke $m = qJ$, die Zahl der Kraftlinien, die vom Pole ausgehen, ist also (nach Nr. 57) $4\pi m = 4\pi Jq$. Diese sind im homogenen Felde sämtlich als parallel anzunehmen. Mit diesen vom induzierten Magnetismus allein herrührenden Kraftlinien vereinigen sich (durch Superposition) die qF Kraftlinien des ursprünglichen Feldes, im ganzen handelt es sich um die Anzahl $qF + 4\pi Jq$, so dafs durch die Flächeneinheit

Fig. 180.



$$N = 4\pi J + F$$

Kraftlinien gehen. Dafür kann man nach 2) schreiben

$$N = 4\pi\varkappa F + F.$$

Die Konstante der Permeabilität wird also

$$\mu = \frac{N}{F} = \frac{4\pi\varkappa F + F}{F} = 4\pi\varkappa + 1.$$

Der Zusammenhang zwischen der Susceptibilitäts- und der Permeabilitätskonstante wird also gegeben durch die Gleichung

3) $$\mu = 4\pi\varkappa + 1 \quad \text{oder} \quad 3^*)\ \varkappa = \frac{\mu - 1}{4\pi}.$$

22*

Angenommen z. B. für Eisen von gewisser Weichheit sei $\varkappa = 200$, so würde sich ergeben

$$\mu = 4 \cdot \pi \cdot 200 + 1 = 2512.$$

In der That kann für weiches Eisen μ Werthe zwischen 2000 und 3000 annehmen. Bei dieser aufserordentlichen Durchlafsfähigkeit erklärt sich die **Schirmwirkung** des Eisens ganz von selbst. Man versteht, wie nach Fig. 181 bei einem Hohlcylinder von weichem Eisen von den äufseren Kraftlinien kaum eine durch den inneren Hohlraum geht.

Fig. 181.

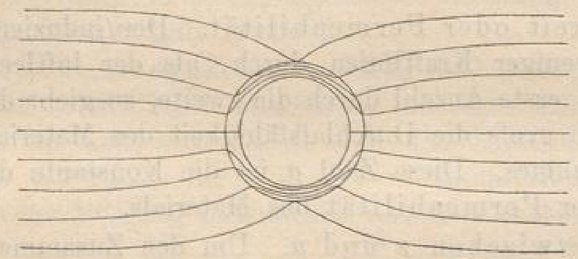


Fig. 182.

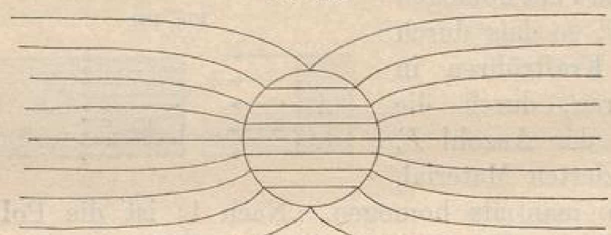
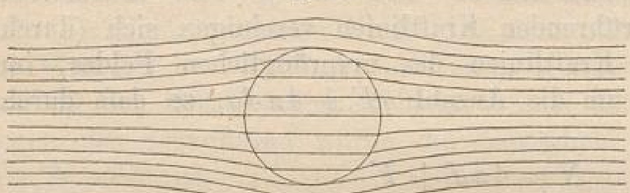


Fig. 183.



Bei massiven Cylindern würden sich für Para- und Diamagnetismus Figuren wie Nr. 182 und 183 ergeben, die sich selbst erläutern. Zu beiden vergleiche man Fig. 136.

Für paramagnetische Körper ist $\mu > 1$ also $\varkappa$ positiv, für diamagnetische ist $\mu < 1$ also $\varkappa$ negativ, für den leeren Raum ist $\mu = 1$, also $\varkappa = 0$.

Über die praktischen Anwendungen der Schirmwirkung vergleiche man die Lehrbücher.