Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

242) Bestimmung der Ablenkung der Magnetnadel durch einen Magnetstab für axiale Lage

$$F = F_2 - F_1 = \frac{m}{(r-l)^2} - \frac{m}{(r+l)^2} = m\,\frac{(r+l)^2 - (r-l)^2}{(r^2-l^2)^2} = \frac{4\,mrl}{(r^2-l^2)^2}$$
$$= \frac{4\,mrl}{r^4\left(1-\frac{l^2}{r^2}\right)^2} = \frac{4\,ml}{r^3\left(1-\frac{l^2}{r^2}\right)^2}.$$

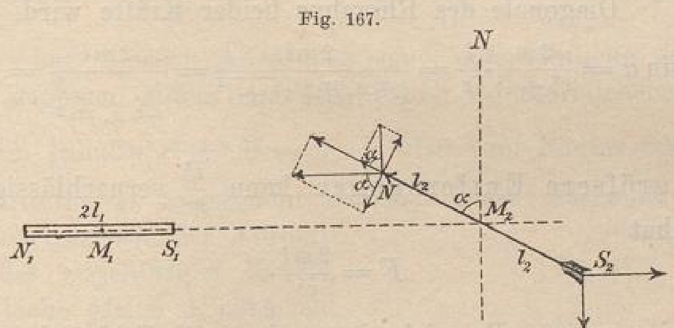
In gröfserer Entfernung kann man $\frac{l^2}{r^2}$ vernachlässigen. Dort wird also

$$F = \frac{4\,ml}{r^3},$$

d. h. dort ist die Feldstärke umgekehrt proportional der 3ten Potenz der Entfernung, nimmt also sehr schnell ab. (Vgl. Störungsgesetz.)

242) **Aufgabe.** Eine kleine Magnetnadel von der Länge $2\,l_2$ und der Polstärke m_2 befinde sich auf der Achse eines Magnetstabes von der Länge $2\,l_1$ und der Polstärke m_1, und zwar in der (grofsen) Entfernung r von der Mitte. Um wieviel wird sie aus der normalen Stellung abgelenkt, wenn der Stab senkrecht gegen den magnetischen Meridian liegt?

Fig. 167.



Auflösung. Bei gröfserer Entfernung sind die richtenden Kräfte als parallel zur Achse anzunehmen. Die Feldstärke ist nach Nr. 241 als $\frac{4\,m_1 l_1}{r^3}$ anzunehmen, bei der durch α angedeuteten Gleichgewichtsstellung also ist das die Nadel richtende Moment des Stabes gleich $\frac{4\,m_1 l_1}{r^3}\, m_2 l_2 \cos\alpha$. Ist nun E die Feldstärke des Erdmagnetismus, so ist ihr richtendes Moment bei derselben Lage $E m_2 l_2 \sin\alpha$. Im Gleichgewichtszustande sind beide Momente gleich zu setzen. Daraus ergiebt sich

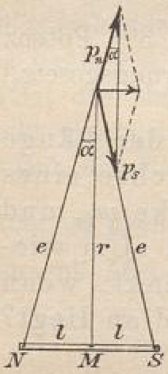
$$\tan\alpha = \frac{4\,m_1 l_1}{E r^3}.$$

Bemerkung. Man kann die letztere Formel, bei der Länge und Polstärke der Nadel gleichgültig sind, benutzen, um mit Hilfe der bekannten Feldstärke des Erdmagnetismus die Polstärke von Magnetstäben zu bestimmen. Ist $E = 0{,}2$, so ergiebt sich als Polstärke des Magnetstabes

$$m_1 = \frac{0{,}2\, r^3}{4\, l_1} \tan \alpha.$$

[Im Jahre 1893 war für Mitteleuropa unter 50° nördlicher Breite und 15° östl. von Greenwich E, in Einheiten des Centimeter-Gramm-Sekundensystems gemessen, gleich 0,198. Anfangs 1896 war der Wert von E in Wien 0,2065, in Paris 0,1942, in Berlin gleich 0,183. Die jährliche Zunahme ist durchschnittlich 0,00015. Über die Bestimmung von E vergleiche die Lehrbücher.]

Fig. 168.



243) **Aufgabe.** Die Feldstärke eines Magnetstabes für die Entfernung r auf seinem magnetischen Äquator zu bestimmen.

Auflösung. Der Nordpol giebt $p_n = \frac{m}{e^2} = \frac{m}{r^2 + l^2}$, der Südpol ein ebenso grofses p_s. Die horizontale Diagonale des Rhombus beider Kräfte wird

$$p = 2\, p_n \sin \alpha = \frac{2\, m}{r^2 + l^2} \cdot \frac{l}{e} = \frac{2\, m l}{(r^2 + l^2)\sqrt{r^2 + l^2}} = \frac{2\, m l}{(r^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\, m l}{r^3 \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Für gröfsere Entfernungen kann $\frac{l^2}{r^2}$ vernachlässigt werden, und man hat

$$F = \frac{2\, m l}{r^3}.$$

Wie im vorigen Beispiel nimmt dort die Feldstärke umgekehrt proportional der 3ten Potenz der Entfernung ab.

244) **Aufgabe.** Die Feldstärke eines kleinen Magnetstabes für einen beliebigen Punkt zu finden.

Erste Auflösung. Auf dem Wege von Nr. 86 ergiebt sich p, wenn r_1 und r_2 die Entfernungen des Punktes von den beiden Polen sind, aus

$$p^2 = \frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4} - \frac{2 \cos (\vartheta_2 - \vartheta_1)}{r_1^2 r_2^2}.$$

Auch die Richtung ist auf dem dortigen Wege leicht zu bestimmen. Setzt man $p = c$, so hat man die Gleichung der Linien gleicher Feldstärke (Intensität) für das in Nr. 92 behandelte Problem. Um jedoch an Potentialbetrachtungen zu gewöhnen, wird noch eine zweite Lösung gegeben.