



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

244) Dasselbe für beliebige Lage

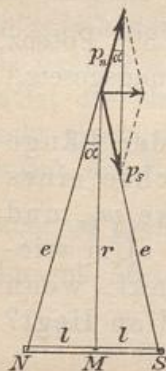
[urn:nbn:de:hbz:466:1-77934](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77934)

bekannten Feldstärke des Erdmagnetismus die Polstärke von Magnetstäben zu bestimmen. Ist $E = 0,2$, so ergibt sich als Polstärke des Magnetstabes

$$m_1 = \frac{0,2 r^3}{4 l_1} \tan \alpha.$$

[Im Jahre 1893 war für Mitteleuropa unter 50° nördlicher Breite und 15° östl. von Greenwich E , in Einheiten des Centimeter-Gramm-Sekundensystems gemessen, gleich 0,198. Anfangs 1896 war der Wert von E in Wien 0,2065, in Paris 0,1942, in Berlin gleich 0,183. Die jährliche Zunahme ist durchschnittlich 0,00015. Über die Bestimmung von E vergleiche die Lehrbücher.]

Fig. 168.



243) **Aufgabe.** Die Feldstärke eines Magnetstabes für die Entfernung r auf seinem magnetischen Äquator zu bestimmen.

Auflösung. Der Nordpol giebt $p_n = \frac{m}{e^2} = \frac{m}{r^2 + l^2}$, der Südpol ein ebenso großes p_s . Die horizontale Diagonale des Rhombus beider Kräfte wird

$$p = 2 p_n \sin \alpha = \frac{2 m}{r^2 + l^2} \cdot \frac{l}{e} = \frac{2 m l}{(r^2 + l^2) \sqrt{r^2 + l^2}} = \frac{2 m l}{(r^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2 m l}{r^3 \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Für größere Entfernungen kann $\frac{l^2}{r^2}$ vernachlässigt werden, und man hat

$$F = \frac{2 m l}{r^3}.$$

Wie im vorigen Beispiel nimmt dort die Feldstärke umgekehrt proportional der 3^{ten} Potenz der Entfernung ab.

244) **Aufgabe.** Die Feldstärke eines kleinen Magnetstabes für einen beliebigen Punkt zu finden.

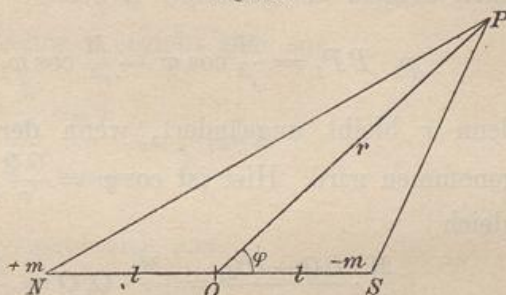
Erste Auflösung. Auf dem Wege von Nr. 86 ergibt sich p , wenn r_1 und r_2 die Entfernungen des Punktes von den beiden Polen sind, aus

$$p^2 = \frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4} - \frac{2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{r_1^2 r_2^2}.$$

Auch die Richtung ist auf dem dortigen Wege leicht zu bestimmen. Setzt man $p = c$, so hat man die Gleichung der Linien gleicher Feldstärke (Intensität) für das in Nr. 92 behandelte Problem. Um jedoch an Potentialbetrachtungen zu gewöhnen, wird noch eine zweite Lösung gegeben.

Zweite Auflösung. Das Potential in P ist die Arbeit, die man nötig hat, um die magnetische Poleinheit von dort in den Bereich zu bringen, wo der Potentialwert gleich Null ist. Diesen Wert erreicht man aber auch dadurch, daß man z. B. S unter der Gegenwirkung der Menge 1 in P allein nach N bringt. Da es sich um einen kleinen Stab (Elementarmagnet) handeln soll, kann man $PS = PN = PO = r$ setzen. Von der

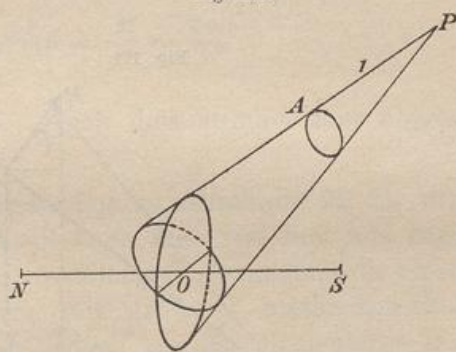
Fig. 169.



Gegenkraft $\frac{m}{r^2}$ ist nur die Horizontalkomponente $\frac{m}{r^2} \cos \varphi$ zu überwinden. Da der Arbeitsweg gleich $2l$ ist, handelt es sich um die Arbeit $\frac{m}{r^2} \cos \varphi 2l$. Hier ist $2ml$ das magnetische Moment M des Stabes, also ist der gesuchte Potentialwert angenähert gleich $V = \frac{M \cos \varphi}{r^2}$.

Man hat diesem Ausdrucke eine eigentümliche geometrische Deutung gegeben, indem man sich in der Äquatorialebene eine Kreisfläche vom Inhalte $r^2 = M = 2ml$, also vom Radius $r = \sqrt{\frac{M}{\pi}}$ mit O als Mittelpunkt angebracht dachte. Diese erscheint von P aus gesehen ebenso, wie der Normalchnitt des zugehörigen Kegels, dessen Fläche gleich $M \cos \varphi$ ist. Durch Reduktion auf die Entfernung $PA = 1$ erhält man den zugehörigen körperlichen Winkel $w = \frac{M \cos \varphi}{r^2} = V$. Also:

Fig. 170.



Der Potentialwert eines Elementarmagnets in einem beliebigen Punkte P ist gleich dem räumlichen Winkel, unter dem man von dort aus eine kreisförmige Hilfsfläche erblickt, die mit der Äquatorebene des Magnets zusammenfällt und deren Inhalt durch den Wert des magnetischen Moments dargestellt wird.

Aus diesem Ausdrucke muß nun die Feldstärke nach Größe und Richtung abgeleitet werden. Sie kann in eine Komponente p_1 in der

Tangente des um O geschlagenen Kreises und in eine in den Radius fallende p_2 zerlegt werden. (Vgl. Fig. 171.) Bewegt man die Einheit von P aus in der Tangente um einen beliebigen Weg PP_1 , so ist nach obigem die geleistete Arbeit

$$p_1 \cdot PP_1 = \frac{M}{r^2} \cos \varphi - \frac{M}{r^2} \cos \varphi_1 = \frac{M}{r^2} (\cos \varphi - \cos \varphi_1),$$

denn r bleibt ungeändert, wenn der willkürliche Weg sehr klein genommen wird. Hier ist $\cos \varphi = \frac{OQ}{r}$, $\cos \varphi_1 = \frac{OQ_1}{r}$, also die Arbeit gleich

$$\frac{M}{r^2} \cdot \frac{OQ - OQ_1}{r} = \frac{M}{r^3} \cdot Q_1Q = \frac{M \cdot SP}{r^3} = \frac{M \cdot PP_1}{r^3} \sin \alpha.$$

Setzt man dies wieder gleich $p_1 \cdot PP_1$, so hebt sich der willkürliche Weg PP_1 , und es bleibt als Komponente der Feldstärke bestehen

$$p_1 = \frac{M}{r^3} \cdot \sin \varphi.$$

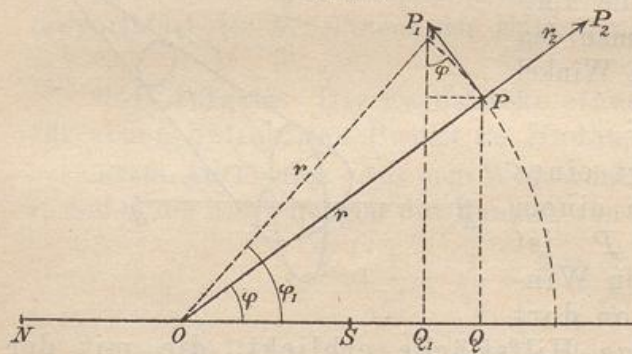
Bewegt man jetzt die Einheit auf dem Radius um eine willkürliche Strecke PP_2 , so ist die Arbeit

$$p_2 \cdot PP_2 = \frac{M \cos \varphi}{r^2} - \frac{M \cos \varphi}{r_2^2} = M \cos \varphi \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_2^2} \right)$$

zu leisten, denn jetzt bleibt φ ungeändert. Man kann dafür schreiben

$$M \cos \varphi \frac{r_2^2 - r^2}{r^2 r_2^2} = M \cos \varphi \frac{(r_2 + r)(r_2 - r)}{r^2 r_2^2} = M \cos \varphi \frac{r_2 + r}{r^2 r_2^2} PP_2.$$

Fig. 171.



Setzt man dies wieder gleich $p_2 \cdot PP_2$, so hebt sich der Weg PP_2 weg, und es bleibt stehen

$$p_2 = M \cos \varphi \frac{r_2 + r}{r^2 r_2^2}.$$

Nimmt man die willkürliche Länge des Weges unendlich klein, so kann man $r_2 = r$

setzen, an Stelle des Bruches tritt also $\frac{2r}{r^4} = \frac{2}{r^3}$, und es wird

$$p_2 = \frac{2 M \cos \varphi}{r^3}$$

die andere Komponente. Die Resultante, d. h. die Feldstärke ergibt sich als

$$1) \quad F = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \frac{M}{r^3} \sqrt{\sin^2 \varphi + 4 \cos^2 \varphi} = \frac{M}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \varphi}.$$

Die Neigung gegen den Radius r ergibt sich aus

$$\tan \alpha = \frac{p_1}{p_2} = \frac{\frac{M}{r^3} \sin \varphi}{\frac{2M}{r^3} \cos \varphi} = \frac{1}{2} \tan \varphi.$$

Die Neigung $\beta = \alpha + \varphi$ ergibt sich aus

$$2) \quad \tan \beta = \tan(\alpha + \varphi) = \frac{\tan \alpha + \tan \varphi}{1 - \tan \alpha \tan \varphi} = \frac{\frac{1}{2} \tan \varphi + \tan \varphi}{1 - \frac{1}{2} \tan \varphi \tan \varphi} = \frac{3 \tan \varphi}{2 - \tan^2 \varphi}.$$

Damit ist die Feldstärke für jeden Punkt nach Größe und Richtung bestimmt. Dabei ist zu bemerken, daß nur die Größe von M abhängig ist, nicht aber die Richtung.

Für Punkte der Achse ist $\varphi = 0$, also wird dort

$$p = \frac{M}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 0} = \frac{2M}{r^3} = \frac{4ml}{r^3},$$

wie schon oben gezeigt war. Der zugehörige Potentialwert ist

$$\frac{M \cos 0}{r^2} = \frac{2ml}{r^2}.$$

Für Punkte der Äquatorebene ist $\varphi = 90^\circ$. Dort wird

$$p = \frac{M}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 90^\circ} = \frac{M}{r^3} = \frac{2ml}{r^3},$$

Der Potentialwert ist $\frac{M \cos 90^\circ}{r^2} = 0$. Auch dies stimmt zum obigen Resultate.

Damit ist eine wesentliche Ergänzung zu Abschnitt 92 für den Fall kleiner Magneten gegeben. Auch kann man von hier aus dazu übergehen, das Potential einer Reihe von Elementarmagneten, die einen Stab von unendlicher Länge bilden, mit größerer mathematischer Strenge zu untersuchen. Dies würde jedoch aus der elementaren Behandlung heraustreten.

245) Magnetische Doppelschale oder Blatt. Der folgende Abschnitt macht es nötig, auch auf die Theorie der magnetischen Doppelschale einzugehen. Man versteht darunter eine sehr dünne Schale (Blatt), welche dadurch entsteht, daß ein irgend wie gestaltetes