



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

245) Magnetische Doppelschale oder Blatt

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77934](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77934)

die andere Komponente. Die Resultante, d. h. die Feldstärke ergibt sich als

$$1) \quad F = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \frac{M}{r^3} \sqrt{\sin^2 \varphi + 4 \cos^2 \varphi} = \frac{M}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \varphi}.$$

Die Neigung gegen den Radius r ergibt sich aus

$$\tan \alpha = \frac{p_1}{p_2} = \frac{\frac{M}{r^3} \sin \varphi}{\frac{2M}{r^3} \cos \varphi} = \frac{1}{2} \tan \varphi.$$

Die Neigung $\beta = \alpha + \varphi$ ergibt sich aus

$$2) \quad \tan \beta = \tan(\alpha + \varphi) = \frac{\tan \alpha + \tan \varphi}{1 - \tan \alpha \tan \varphi} = \frac{\frac{1}{2} \tan \varphi + \tan \varphi}{1 - \frac{1}{2} \tan \varphi \tan \varphi} = \frac{3 \tan \varphi}{2 - \tan^2 \varphi}.$$

Damit ist die Feldstärke für jeden Punkt nach Größe und Richtung bestimmt. Dabei ist zu bemerken, daß nur die Größe von M abhängig ist, nicht aber die Richtung.

Für Punkte der Achse ist $\varphi = 0$, also wird dort

$$p = \frac{M}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 0} = \frac{2M}{r^3} = \frac{4ml}{r^3},$$

wie schon oben gezeigt war. Der zugehörige Potentialwert ist

$$\frac{M \cos 0}{r^2} = \frac{2ml}{r^2}.$$

Für Punkte der Äquatorebene ist $\varphi = 90^\circ$. Dort wird

$$p = \frac{M}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 90^\circ} = \frac{M}{r^3} = \frac{2ml}{r^3},$$

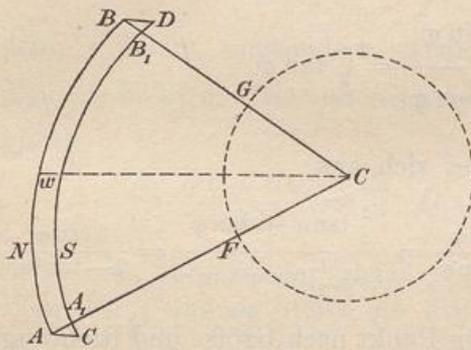
Der Potentialwert ist $\frac{M \cos 90^\circ}{r^2} = 0$. Auch dies stimmt zum obigen Resultate.

Damit ist eine wesentliche Ergänzung zu Abschnitt 92 für den Fall kleiner Magneten gegeben. Auch kann man von hier aus dazu übergehen, das Potential einer Reihe von Elementarmagneten, die einen Stab von unendlicher Länge bilden, mit größerer mathematischer Strenge zu untersuchen. Dies würde jedoch aus der elementaren Behandlung heraustreten.

245) Magnetische Doppelschale oder Blatt. Der folgende Abschnitt macht es nötig, auch auf die Theorie der magnetischen Doppelschale einzugehen. Man versteht darunter eine sehr dünne Schale (Blatt), welche dadurch entsteht, daß ein irgend wie gestaltetes

Stück einer krummen Fläche (Kalotte) einer Parallelverschiebung unterworfen wird, worauf die der Anfangslage entsprechende Fläche homogen mit Nordmagnetismus, die der Schluslage entsprechende in derselben Dichte mit Südmagnetismus belegt wird. Ist z. B. 1 die Dichtigkeit der einen Belegung, so kann man die der andern mit -1 bezeichnen.

Fig. 172.



In Fig. 172 ist AB die mit Nordmagnetismus, A_1B_1 die mit Südmagnetismus belegte Fläche.

Auf die unendlich kleinen Teile AA_1C und BB_1D_1 braucht keine Rücksicht genommen zu werden. Die Länge des kleinen Verschiebungsweges sei w . Angenommen in C befände sich die Masseneinheit, so erfordert die

Aufgabe, diese ins Unendliche zu entfernen, ebenso viel Arbeit, wie die, bei festgehaltenem C die Schale ins Unendliche zu entfernen. Angenommen, das Entfernen der Schale AB ins Unendliche erfordert die Arbeit A , dann erfordert das Entfernen der Schale A_1B_1 erstens die zur Verschiebung um w nötige Arbeit und außerdem die Arbeit $-A$. Das Potential der Doppelschale ist also für einen Punkt C die Arbeit, die nötig ist, unter alleiniger Einwirkung der in C konzentrierten Masseneinheit die eine der beiden Schalen um die Strecke w zu verschieben. Denn A und $-A$ heben bei der Gesamtbewegung einander auf.

Man denke sich jetzt aus der Kalotte AB und dem Punkte C einen Kegel gebildet, außerdem um C die Einheitskugel gelegt, so daß ein geschlossener Raum $ABGF$ entsteht, dessen sämtliche Flächen in der Dichte 1 mit Masse belegt gedacht werden sollen. Nach dem Laplaceschen Satze erfährt dieser Raum durch die außen liegende Masse C die Spannung Null. Da die Seitenwände AF , BG u. s. w. dazu nichts beitragen, ist die auf die Fläche GF ausgeübte Abstofsung ebenso groß, als die auf die Fläche AB einwirkende. Ist nun die Fläche $FG = \varphi$, d. h. der körperliche Winkel, unter dem AB gesehen wird, gleich φ , so ist die auf diese Fläche einwirkende Abstofsung, sobald der körperliche Winkel klein ist, gleich $\frac{\varphi}{1^2} = \varphi$.

Da nun w unendlich klein zu denken ist, so ist die Anziehung auf A_1B_1 ebenfalls gleich φ , die zur Verschiebung von A_1B_1 um w nötige Arbeit ist also gleich φw , und ebenso groß ist das Potential der kleinen Doppelschale in Bezug auf den Punkt C . Ist die Dichte der Belegung nicht 1, sondern δ , so ist das Potential gleich $\varphi \omega \delta$.

Ist die Schale groß, so zerlege man sie in kleine Teile, deren körperliche Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sein mögen. Nach Nr. 79 sind die Potentialwerte algebraisch zu addieren, so daß man erhält

$$V = w\delta(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) = w\delta\varphi,$$

wo φ die Summe der körperlichen Winkel bedeutet. Folglich:

Das Potential einer magnetischen Doppelschale (oder eines magnetischen Blattes) in einem beliebigen Punkte ist gleich dem Produkte aus dem Ab-

stande beider Schalen, der Dichte der Be-

legung und des körperlichen Winkels, unter dem sie von dem Punkte aus erscheint.

Der Potentialwert ist positiv oder negativ, je nach-

dem C auf der einen oder der andern Seite der Schale liegt. Nun lassen sich durch einen Kegel Doppelschalen der verschiedensten Gestaltung begrenzen. Sämtliche haben für die Spitze C denselben Potentialwert (vgl. Fig. 173), sobald sie im gleichen Sinne belegt sind. Handelt es sich um eine geschlossene Fläche, die außen mit $+$, innen mit $-$ belegt ist, so ist, da von C aus gesehen die beiden Doppelschalen in ungleichem Sinne belegt sind, das Potential für C gleich Null. Vgl. Fig. 174. Dies zeigte sich z. B. bei gewissen Influenz-

problemen. Die Doppelschale kann auch eben sein, z. B. kreisförmig. Läßt man dabei C z. B. nach D_1 rücken, so ist der körperliche Winkel gleich der Hälfte der Oberfläche der Einheitskugel, d. h. gleich $2 \cdot 1^2\pi = 2\pi$, also das Potential dort gleich $2w\delta\pi$. Auf der andern Seite bei D ist es gleich $-2w\delta\pi$, der Potentialunterschied für beide Punkte ist also gleich $4w\delta\pi$. Auf welchem Wege

Fig. 173.

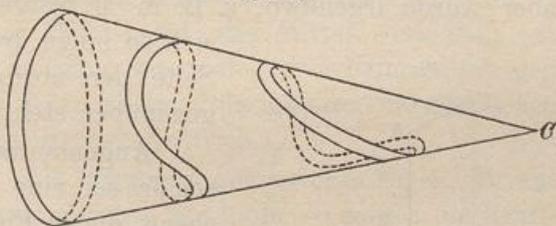


Fig. 174.

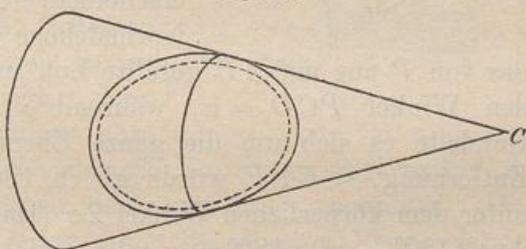
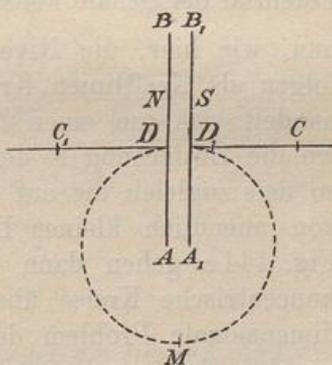
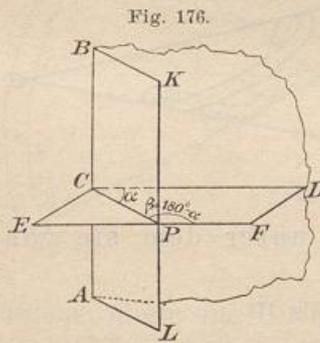


Fig. 175.



man auch die magnetische Einheit — ohne durch das Blatt selbst zu gehen — von D_1 nach D führe, stets ist die Arbeit $4w\delta\pi$ nötig.

Angenommen, die nordmagnetische Einheit könnte sich auf dem skizzierten Kreise bewegen, so würde sie, nach D gebracht, im Kreise herum nach D_1 wandern. Angenommen ferner, die Schale könnte sich um eine Achse drehen, die im Halbierungspunkte von DD_1 auf der Ebene der Zeichnung senkrecht steht, die nordmagnetische Einheit aber würde irgendwo, z. B. in M festgehalten, so würde die Schale sich so lange drehen, bis die süd magnetische Seite der nordmagnetischen Einheit genau gegenüber steht.



das von P aus auf AB gefällte Lot, und dieses bildet mit der Ebene den Winkel $PCD = \alpha$, während $\sphericalangle\beta = \sphericalangle CPF = 180^\circ - \alpha$ ist. Handelte es sich um die ganze Ebene, so läge AB in unendlicher Entfernung, $\sphericalangle CPF$ würde gleich 180° sein, und die Ebene würde unter dem körperlichen Winkel 2π (Halbkugelfläche $2\pi 1^2$) erscheinen. Aus $(180^\circ - \alpha^\circ) : 180^\circ = \varphi : 2\pi$ ergibt sich als körperlicher Winkel

$$\varphi = \frac{2\pi(180^\circ - \alpha^\circ)}{180^\circ},$$

oder wenn man Bogen statt der Winkel schreibt,

$$\varphi = \frac{2\pi\hat{\beta}}{\pi} = 2\hat{\beta}.$$

Für alle Punkte der Ebene $ABKL$ ist demnach das Potential der Schale konstant gleich $w\delta 2\pi \frac{180^\circ - \alpha^\circ}{180^\circ}$ oder $w\delta 2\hat{\beta}$. Sind nun, wie hier, die Niveauflächen ein Ebenenbüschel durch AB , so folgen als Kraftlinien Kreise, deren Mittelpunkte auf AB liegen. Es handelt sich um einen besonderen Fall der Fig. 144c, den nämlich, wo die Entfernung w der parallelen Ebenen verschwindend klein ist, so daß zugleich die auf den Aufsenseiten lagernde Elektrizitätsmenge von unendlich kleiner Dichte ist. Die asymptotischen Kurven der Fig. 144c gehen dann in ein Strahlenbüschel, die Niveaulinien in konzentrische Kreise über. Es handelt sich zugleich um das zweidimensionale Problem der Doppellinie, d. h. um das Vertauschungsproblem des zweidimensionalen Punktproblems, so daß sich hier ein neuer Übergang zum Gebiete des logarithmischen Potentials eröffnet. Durch die Abbildung $Z = \sqrt{z}$ erhält man das Vertauschungsproblem

des lemniskatischen Zweipunktproblems, welches auf dieselben Orthogonalscharen führt, wie letzteres.

246) Para- und Diamagnetismus. Das von Faraday entdeckte Verhalten para- und diamagnetischer Körper zwischen zwei Polen wird in den Lehrbüchern dargestellt und hier als bekannt vorausgesetzt. Da ein und derselbe Körper bald para-, bald diamagnetisches Verhalten zeigt, je nach dem Mittel, in dem er sich befindet, so leuchtet ein, daß ähnlich, wie bei der Elektrizität, das Mittel wesentlich am Vorgange beteiligt ist. Der Vorgang ist analog dem beim Aufsteigen oder Niedersinken desselben Körpers in Flüssigkeiten verschiedenen spezifischen Gewichtes. (Magnetischer Auftrieb.)

a) Paramagnetismus. Als Beispiel diene weiches Eisen. Bringt man solches in die Nähe eines kräftigen Nordpols, so zeigen die Kraftlinienversuche, daß es die Kraftlinien an sich heran und zum Teil in sich hineinzieht, als ob es ein Südpol wäre. Es passieren demnach mehr Kraftlinien durch das Eisen, als durch das gleiche Volumen Luft bzw. den gleichen luftleeren Raum. Der Kraftfluß wird begünstigt. Man kann sich den Vorgang mechanisch versinnbildlichen. Der Punkt S zieht die Kraftlinien NA und NA_1 gewissermaßen an, er wird ebenso stark von ihnen angezogen. Die Anziehungen geben eine nach N gerichtete Resultante. Ebenso ist es mit je zwei anderen symmetrisch liegenden Kraftlinien. Eine ponderomotorische Anziehung findet nun wirklich statt, natürlich nicht durch geometrische Gebilde, sondern durch die Einwirkung der polarisierten Molekülreihen veranlaßt. Das Eisen wird nach den Stellen hingezogen, wo die ursprünglich geradlinigen Kraftlinien dichter beisammen liegen.

Denkt man sich die Pole punktförmig, so erhält man für die Kraftlinien Gestalten, wie sie in Fig. 76 und 77 veranschaulicht sind. In der Wirklichkeit nehmen sie etwa die in Fig. 178 skizzierte Form an. Normal gegen sie liegend sind die Niveauflächen des Potentials zu denken.

Eine hydrodynamische Analogie würde folgende sein. Man denke sich Wasser von N aus nach allen Richtungen strömend. An Stelle

Fig. 177.

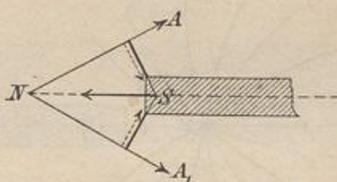


Fig. 178.

