Perspektive

Freyberger, Hans

Leipzig, 1897

IV. Kapitel. Freie Perspektive

welcher Richtung und Entfernung das Bild eine Ansicht des Objektes liefert. Der senkrechte Abstand des Standpunkts F von X X und der senkrechte Abstand des Auges von X_2 X_2 sind natürlich gleich. Er soll etwa zweimal so groß sein, als das Objekt in seinem größten Maß nach Höhe und Breite; es kommt nur noch darauf an, wie hoch man das Auge nimmt.

Fig. 13 Seite 40/41 bietet ein weiteres Beispiel einer derartigen Konstruktion.

§ 16. Ist nun wie in Fig. 14 ein Grundriß Z und Standpunkt F gegeben, so zieht man die beiden äußeren Strahlen Fh Fm und halbiert den Winkel m Fh; senkrecht zu dieser Winkelhalbierenden zieht man durch die äußerste Kante n den Grundriß der Bildfläche XX.

§ 17. Diese Methode genügt zumeist einfacheren Ansprüchen im Baufache; für weitergehende Anforderungen, besonders für Konstruktionen reicher Einzelheiten würde sie sehr umständlich werden. Da Grundriß und Aufriß fertig vorhanden sein müssen, gestattet sie der Phantasie des Künstlers keinen Spielraum mehr und ist daher für malerische Zwecke unbrauchbar.

IV. Kapitel.

Freie Perspektive.

§ 18. Nimmt man ein Blatt Papier, ein Stück ebener Pappe oder wie in Fig. 15 oben ein Brett und hält dasselbe wagrecht und in Augenhöhe, so ist von der Ebene des Brettes nichts sichtbar; man sieht nur seine vordere Kante; dasselbe Brett etwas höher gerückt, wie in Lage II ergiebt schon eine schmale Untersicht, noch höher eine etwas breitere Untersicht und diese Untersicht wächst an Breite zusehends mit der

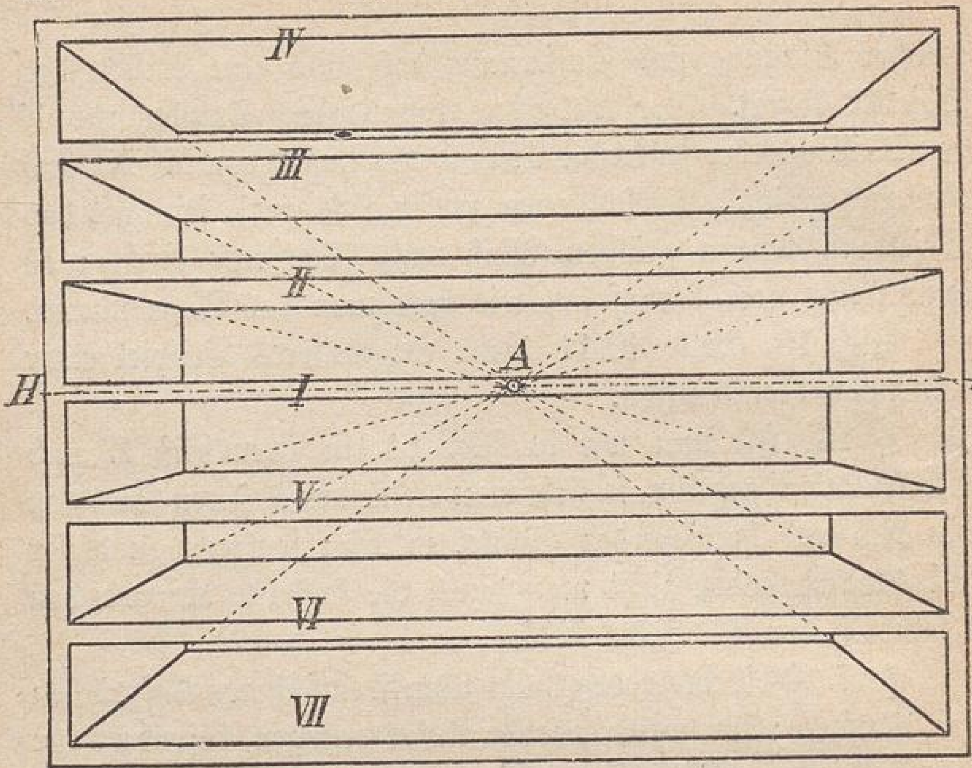


Fig. 15.

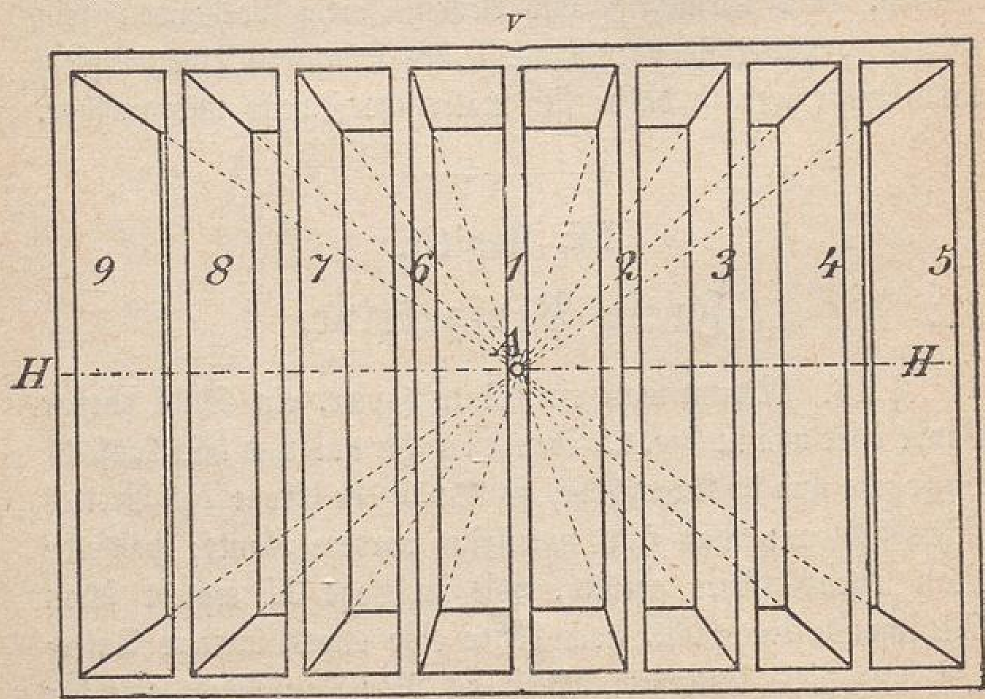


Fig. 15.

Entfernung des Brettes von der Augenhöhe; dieselbe Erscheinung haben wir als Aufsicht bei Lage V, VI und VII.

Wenn nun die Ebene des Brettes I bis zum Schnitt mit dem unendlich fern gedachten Himmelsgewölbe verlängert würde, so bekäme man als Spur eine wagrechte Gerade, die mit H H bezeichnet werden und fortan Augenhöhe heißen soll.

H H ist also die Spur der durch unser Auge wagrecht gelegten Ebene am Himmelsgewölbe; man nennt eine solche unendliche ferne Spur einer Ebene ihre Flucht. Was für eine Flucht würde zum Beispiel die Ebene II haben?

Jedenfalls eine wagrecht Gerade; unter der Augenhöhe kann die Gerade nicht liegen, da sonst die Ebene II die Ebene I schneiden müßte, was nach der Voraussetzung, daß beide wagrecht sind, also parallel, nicht möglich ist; über H H kann die Flucht auch nicht liegen, weil sonst die unendliche Ferne noch nicht erreicht wäre. Die Flucht muß also mit H H zusammenfallen; dasselbe gilt von den Ebenen III, IV und sinngemäß von V, VI, VII; die Flucht aller wagrechten Ebenen ist also die Augenhöhe H H.*)

§ 19. Nimmt man nun wie in Fig. 15 unten in der Sehrichtung eine senkrechte Ebene 1 durch das Auge an, so ergiebt sich als Flucht die Senkrechte V V; dies ist gleichzeitig die Flucht für alle weiteren Ebenen die zu Ebene 1 parallel gehen, also für 2, 3 u. s. w.

§ 20. V V und H H schneiden sich in A. A ist der Hauptpunkt und die Linie von A nach dem Auge die Sehachse. Die Sehachse bezeichnet also die Schnittlinien der Ebenen I und 1; alle weiteren zur Sehachse parallelen Linien können betrachtet werden als Schnittlinien zweier

*) (In den Lehrbüchern ist hiefür bisher die Benennung Horizont üblich gewesen.)

Ebenen, wovon die eine parallel ist zu I, die andere parallel zu 1 ist. Die Flucht dieser Schnittlinien muß also sowohl auf H H als auch auf V V liegen, das heißt im Hauptpunkt A. Damit ist erwiesen, daß alle Parallelen der Sehachse ihre Flucht im Hauptpunkt A haben.

§ 21. Wir suchen nun diese Betrachtungen für unsere bildliche Darstellung zu verwerten. Angenommen wir zeichnen auf ein Reißbrett und stellen dieses als Bildebene senkrecht zur Sehachse auf; so wird die durch das Auge gehende wagrechte Ebene unsere Bildfläche nach einer Geraden schneiden, die sich mit H H vollkommen deckt, d. h. die Flucht der wagrechten Ebene in Wirklichkeit fällt mit der Flucht auf dem Bilde zusammen. Ebenso wird die Sehachse die Bildfläche in einem Punkte durchdringen, welcher sich mit A genau deckt; d. h. der Fluchtpunkt aller zur Sehachse parallelen Geraden ist auf dem Bilde der Hauptpunkt A. Senkrechte Gerade würden ihren Fluchtpunkt im Zenith und Nadir (höchste und tiefste Punkte senkrecht über und unter uns am Himmelsgewölbe) haben, also auf der Bildfläche senkrecht erscheinen.

Nehmen wir nun Fig. 16 eine wagrechte Gerade im Winkel von 45° zu Ebene V V rechts hinaus und wir legen durch das Auge eine Parallele, so wird diese ihre Flucht am Himmelsgewölbe in einem Punkt D auf H H haben; alle anderen dazu Parallelen würden also dort auch ihre Flucht haben. Die Gerade vom Auge nach D würde die Bildfläche in einem Punkte durchdringen, welcher sich, von unserem Auge aus gesehen, mit D genau deckt; D ist also für die Bildfläche der Fluchtpunkt aller wagrechten Geraden, die unter 45° nach rechts hinausgehen.

§ 22. Für jede andere beliebige Richtung von Geraden würde sich dementsprechend der Fluchtpunkt am

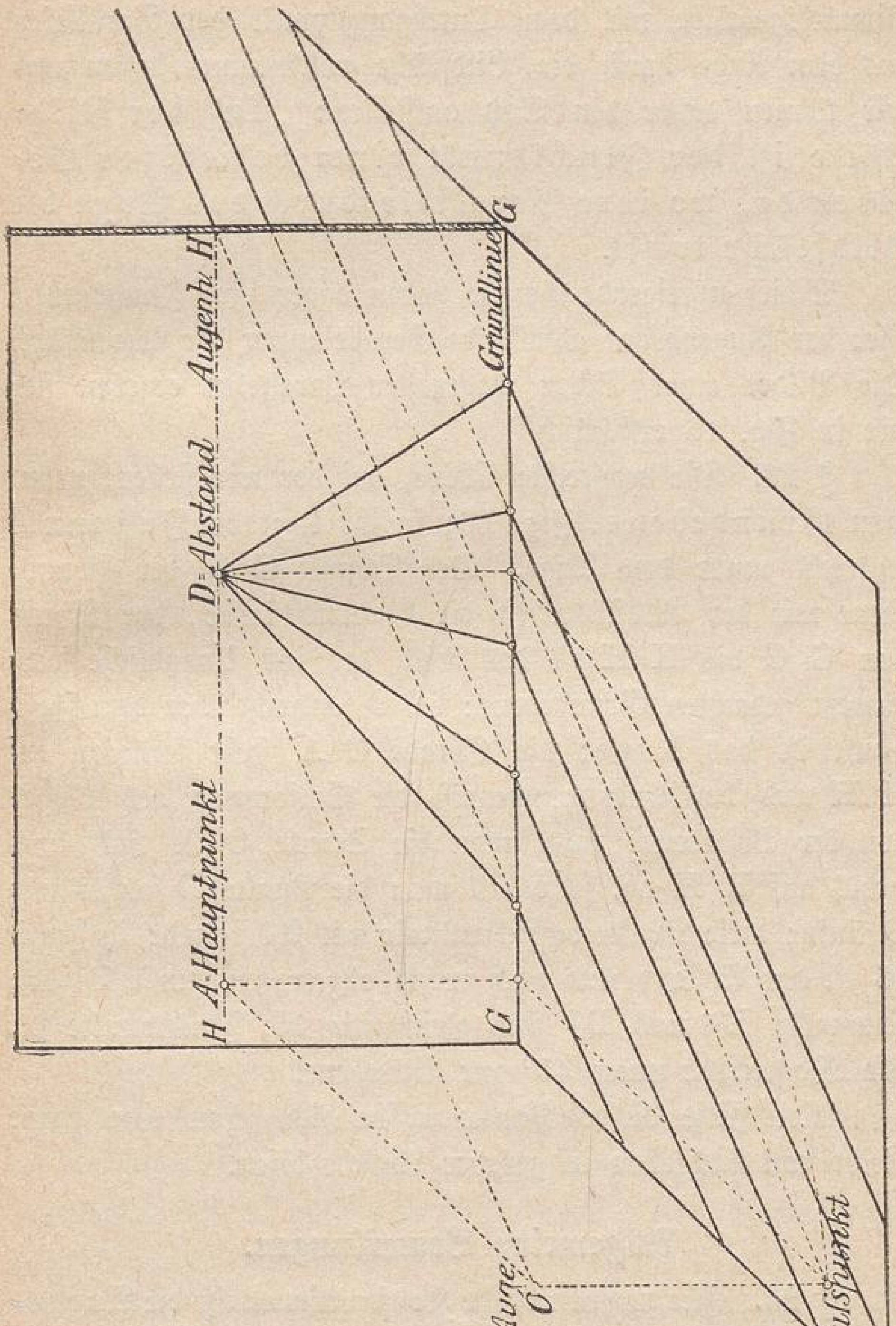

H
A-Hauptpunkt
D-Abstand
Augenh. H
G
Grundlinie G
Auge O
Fusspunkt

Fig. 16.

Himmelsgewölbe mit dem Durchgangspunkt der Parallelen aus dem Auge durch die Bildfläche vollkommen decken und wir können daher den Satz aufstellen: „Auf der Bildfläche ist der Fluchtpunkt einer beliebigen Geraden da, wo ihre Parallele durch das Auge die Bildfläche trifft.

Schief ansteigende Gerade haben daher ihre Fluchtpunkte über der Augenhöhe; abfallende Gerade unter der Augenhöhe. Die Bilder einer Schar wagrechter Parallelen ergeben sich wie in Fig. 16 ersichtlich.

§ 23. Die wagrechte Ebene, auf der wir stehen, nennt man Grundebene, Fig. 16; in ihr liegt der Fußpunkt senkrecht unter dem Auge. Der Schnitt G G der Grundebene mit der Bildfläche ist die Grundlinie, der Raum von G G bis H H ist das Bild der ins Unendliche verlängert gedachten Grundebene; bei O senkrecht über dem Fußpunkt ist das Auge; die Gerade O A steht senkrecht auf H H und bezeichnet demgemäß die Entfernung des Auges von der Bildebene; trägt man die Strecke O A links und rechts auf H H ab, so erhält man die Punkte D rechts und D links; diese Punkte bezeichnen wir mit Abstand; in Figur 16 ist der Abstand nur nach rechts abgetragen (sonst Distanz genannt); D^r und D^l sind gleichzeitig die Fluchtpunkte für alle Wagrechten unter 45° zur Bildebene.

Mit Hilfe dieser Punkte lassen sich schon eine ganze Reihe von Aufgaben in gerader Ansicht lösen.

Allgemeine Bemerkungen.

§ 24. Für perspektivische Konstruktionen ist die Augenhöhe immer als bekannt anzunehmen; sie beträgt für gewöhnlich 1,60 m, für besonders hohe Objekte kann man sie auch höher annehmen und für niedere Gegenstände tiefer. Man nehme an, man sähe das Bild durch ein kleines Loch; da man hierdurch nur mit einem Auge sehen kann, so sind beide Augen bei Konstruktionen auch immer nur für eins angenommen.

§ 25. Der Hauptpunkt liegt im allgemeinen etwa in der Mitte des Bildes, denn er bezeichnet den Punkt, der auf dem Bilde dem Auge gerade gegenüber liegt; er kann also auch als bekannt gelten.

§ 26. Will man einen Gegenstand mit einem Blick übersehen, so muß man sich in einiger Entfernung davon aufstellen; für eine gute Ansicht ist gerade das Maß dieses Abstandes von Bedeutung. Man soll soweit von dem Gegenstand zurücktreten als dieser hoch ist, oder wenn die Breite größer ist als die Höhe, als er breit ist. Ein Haus, das z. B. 20 Meter hoch ist, bedingt für eine gute Ansicht wenigstens einen Abstand von 20 Metern; besser ist es, man nimmt einen Abstand von 30 Metern; im Allgemeinen gilt die Regel, daß man das $1^1/_2$ bis 2fache der größeren Ausdehnung, der Höhe oder der Breite, als Abstand nimmt. Auf einem Bilde, das außer dem Hauptgegenstand noch Umgebung enthält, ist als Mindestmaß des Abstandes die Länge der Diagonale der Bildfläche zu setzen.

§ 27. Die in der Bildfläche selbst liegenden Größen erscheinen in ihrem geometrischen Maßstab; von hier aus werden die Tiefen hineingetragen; alle zugehörigen Hilfspunkte richten sich nach diesem Maßstab; die Grundlinie ist der Anfang für die perspektivischen Ausführungen.

§ 28. Für alle auf einem Bilde auszuführenden Konstruktionen ist H H, G G, A und D unveränderlich. (Perspektivische Einheit.)

Beispiele.

§ 29. Fig. 17. Gegeben sei HH, GG, A und D; auf GG liege eine Strecke MN; über dieser soll ein perspektivisches Quadrat errichtet werden.

Wenn man das Quadrat über M N geometrisch zu zeichnen hätte, so würde man einfach in M und N Senkrechte errichten, durch eine Gerade unter 45° die Länge N P = M N abschneiden und durch eine Parallele P O zu M N das Quadrat schließen. Genau so verfahren wir in der Perspektive. Wir ziehen MA und N A, schneiden durch MD die Strecke N P ab und schließen das Quadrat durch die Parallele P O zu M N.

§ 30. Fig. 18. Gegeben sei HH, GG, A und D; ferner ein an GG anliegendes Quadrat MNOP, dessen Seite MN mit GG einen Winkel von 45° bildet.

Man ziehe M D^r und M D^l, verlängere O P und O N bis zum Schnitt mit G G in R und Q, ziehe R D^r und Q D^l,

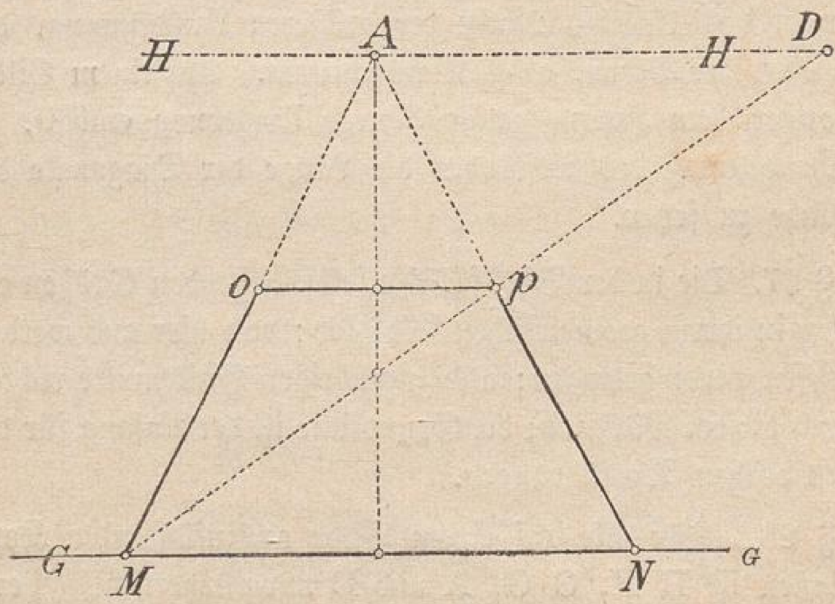


Fig. 17.

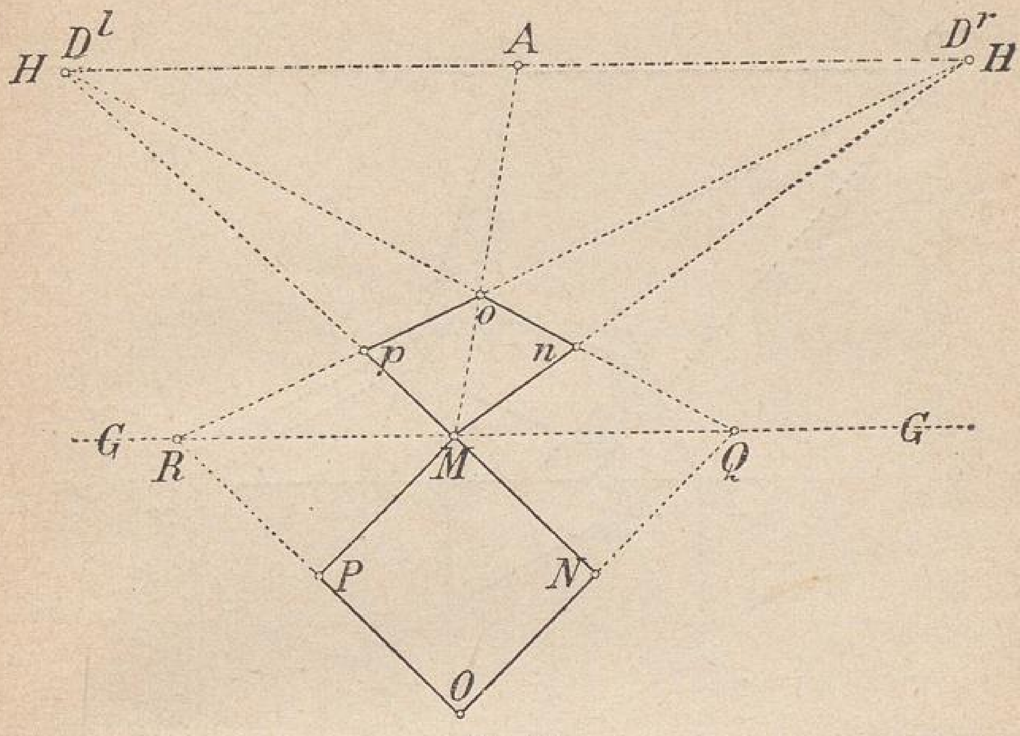


Fig. 18.

so ergeben sich mit den aus M gezogenen Geraden die Schnitte o, p, n und M n o p ist das perspektivische Bild des Quadrates M N O P; zieht man die Diagonale M O, so steht sie auf G G senkrecht, und verlängert man M o, so geht sie durch den Hauptpunkt A.

§ 31. Fig. 19. Gegeben sei H H, A, D, G G und in beliebiger Lage zur Grundlinie G G geometrisch das Rechteck M N O P; dieses soll in Perspektive gesetzt werden.

Ziehe senkrecht zu G G die Geraden $M M^1$, $P P^1$, $N N^1$, $O O^1$ und ziehe $A P^1$, $A M^1$, $A O^1$ und $A N^1$, trage die Strecke $N^1 N$, von N^1 aus auf G G nach N_2 ab und ziehe $N_2 D$, so ergiebt sich beim Schnitt mit $A N^1$ der Punkt n als perspektivisches Bild des Punktes N; ebenso werden die Punkte m o p gefunden, und es ist jetzt m n o p das gesuchte perspektivische Rechteck.

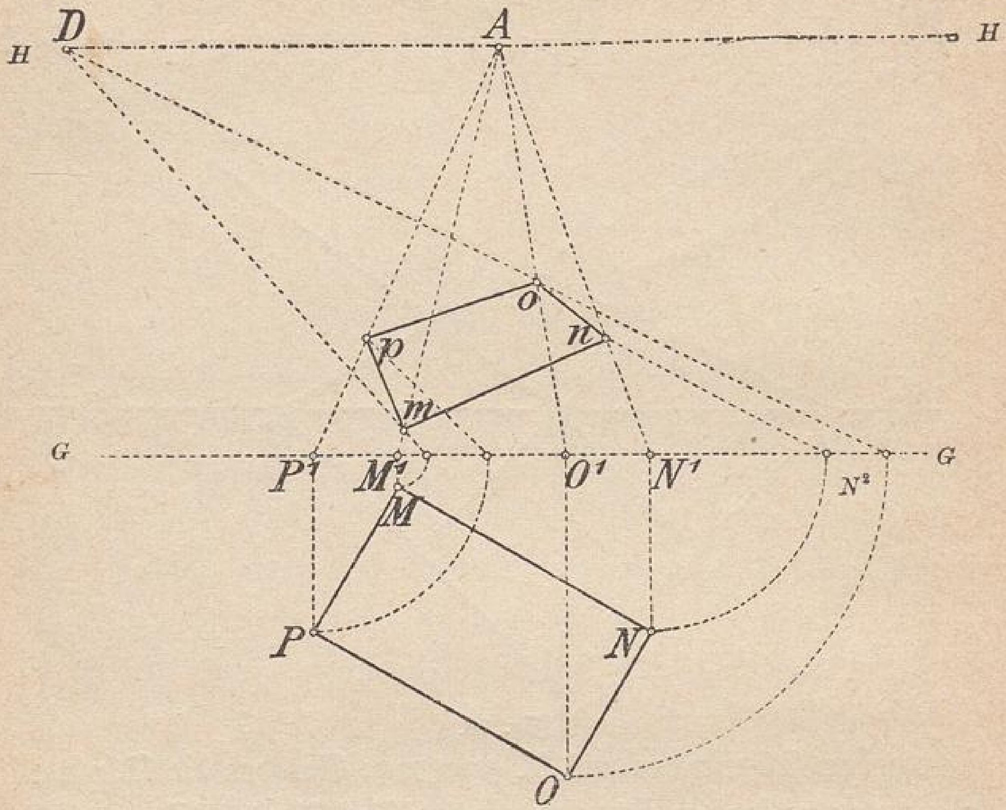


Fig. 19.

§ 32. Der Abstand D[1]) dient also zum Hineintragen von Tiefen auf Gerade, die nach dem Hauptpunkt gehen. Es fragt sich jetzt noch, wie werden Strecken abgetragen auf wagrechte Gerade von schiefer Richtung?

§ 33. Fig. 20. Angenommen wir haben eine wagrechte Gerade mn von beliebig schiefer Richtung; ihr Fluchtpunkt sei V; so können wir den Grundriß der zugehörigen Parallelen durch das Auge konstruieren, wenn wir A und V auf G G nach a und v herunterloten, A a um den Abstand A D nach F verlängern und F v ziehen; F vertritt jetzt die Stelle des Fußpunkts und F v ist die geometrische Richtung von m n; be-

[1]) Es ist gleichgiltig, ob man D^r oder D^l benützt; für D^r ist NN^1 nach links abzutragen, für D^l nach rechts.

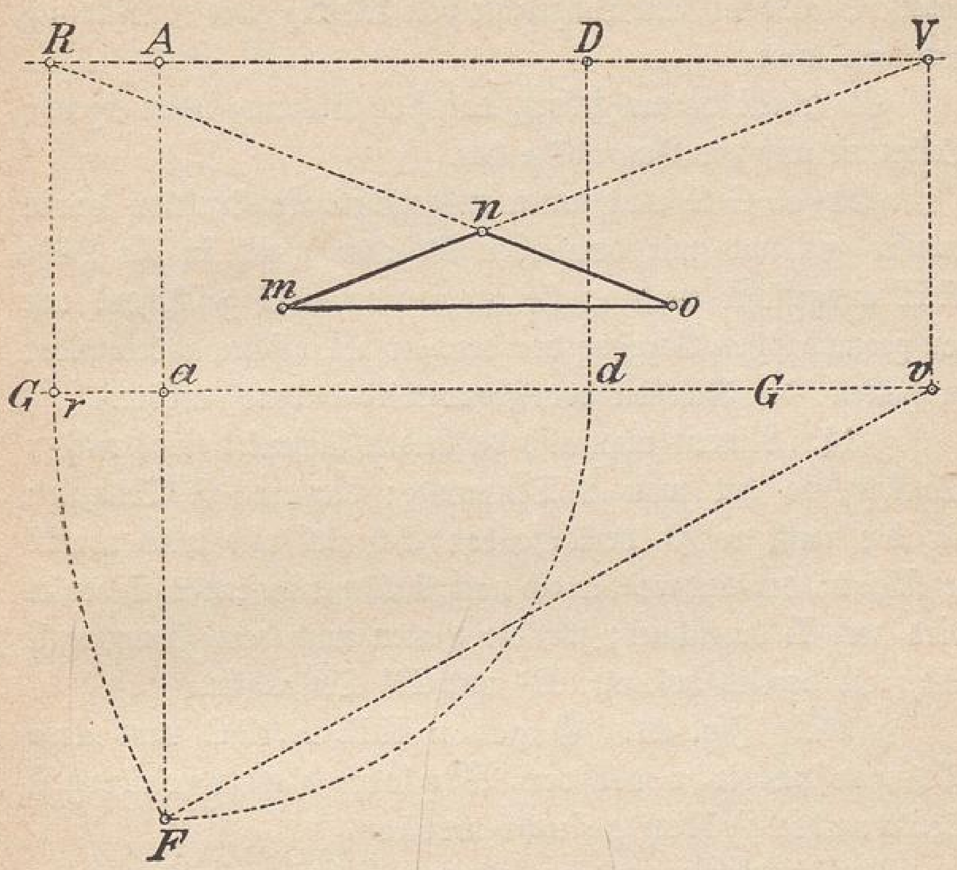


Fig. 20.

schreibt man jetzt aus v mit v F einen Bogen, bis er G G in r trifft, und lotet r in die Augenhöhe hoch nach R, so ist R der Fluchtpunkt aller Geraden von der Richtung r F; zieht man R n bis zum Schnitt mit der Wagrechten aus m in o, so ist im perspektivischen Bilde m n = m o geworden, das Dreieck m n o hat nämlich zu dem Dreieck r F v eine perspektivisch parallele Lage, denn m o ist ‖ r v, mn ‖ F v, o n ‖ F r, also sind beide Dreiecke ähnlich und ihre Seiten daher proportional (im gleichen Verhältnis). Da nun v F = v r ist, so muß auch m n = m o sein. R nennt man den **Teilpunkt** der Linie m n und aller zu ihr Parallelen.

Damit ist also der Weg angegeben, wie man eine gegebene Strecke auf eine Wagrechte von beliebig schiefer Richtung abtragen kann.

Es erhellt daraus sofort, daß jede Richtung ihren eigenen Teilpunkt auf der Augenhöhe hat.

(Die an G G nach unten ausgeführte Konstruktion konnte ebenso gut und mit demselben Resultat gleich in der Höhe H H ausgeführt werden; sie ist hier an G G geschehen, um den geometrischen Vorgang von dem perspektivischen auseinander zu halten; die Klarheit der Figur wird dadurch erhöht.)

§ 34. Nimmt man also die beiden Schenkel eines rechten Winkels, so hat man 2 Teilpunkte; der eine ist Teilpunkt für die nach rechts verlaufenden Schenkel und wird mit R bezeichnet; der andere für die nach links verlaufenden Schenkel wird mit L bezeichnet; für die Linien nach dem Hauptpunkt sind, wie bereits bekannt, D^r und D^l Teilpunkte.

§ 35.[1] Fig. 21. Gegeben HH, A, GG und mno als perspektiver rechter Winkel; die zugehörigen Teilpunkte sollen gesucht werden.

Verlängere mn und no bis zum Schnitt mit der Augenhöhe in V und W, lote von hier auf GG nach v und w herunter, beschreibe über vw einen Halbkreis, welcher von dem verlängerten Lot Aa auf GG in F getroffen wird; von w und v beschreibe die Bögen Fr und Fl; die Punkte r und l nach HH hochgelotet ergeben dort die Teilpunkte R und L.

Zieht man jetzt noch wF und vF und halbiert den rechten Winkel wFv durch eine Gerade, welche GG in g schneidet, und lotet den Punkt g auf HH nach Dg hoch, so ist Dg der Fluchtpunkt für alle Halbierungslinien von Winkeln, die zu wFv parallele Lage haben; nDg halbiert also auch den Winkel mno und Dg ist der sogenannte Diagonalpunkt.

[1]) Die Bezeichnung H H ist fortab in den Figuren weggelassen, sofern die Lage des Horizontes an sich leicht erkenntlich ist.

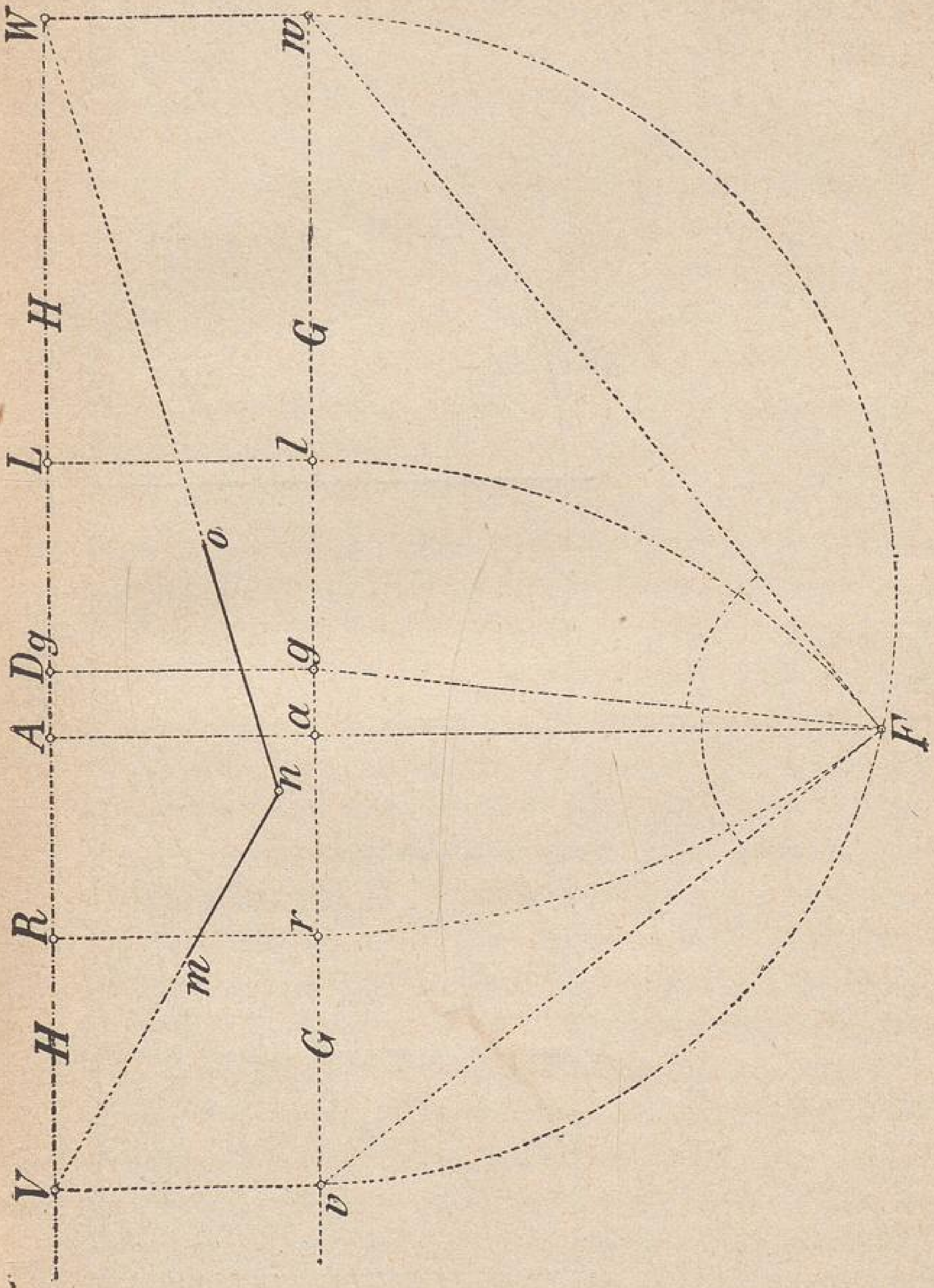


Fig. 21.

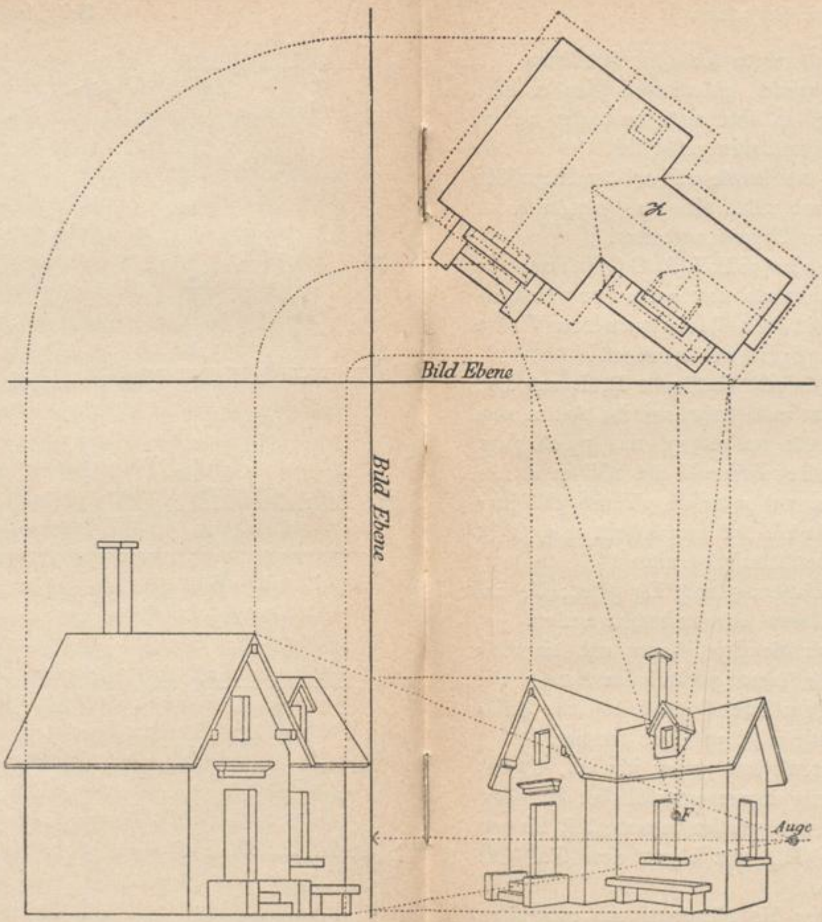


Fig. 13.

(Der zweite Diagonalpunkt würde durch die Halbierung des zu wFv gehörigen Nebenwinkels zu erlangen sein; er liegt aber meist soweit ab, daß er nicht mehr verwendet werden kann und ist für die Konstruktionen entbehrlich).

Würde man ferner die Strecke aF auf der Augenhöhe von A aus nach links und rechts abtragen, so wäre damit auch D^r und D^l, also der Abstand angegeben.

§ 36. Fig. 22. Gegeben sei HH, A, GG; ferner die senkrechte Würfelkante np und an n der perspektiv. rechte Winkel mit den Fluchtpunkten V und W; der Würfel soll gezeichnet werden.

Suche nach voriger Aufgabe die Punkte R, L und Dg; in n ziehe eine Wagrechte und trage auf ihr von n nach links und rechts die Strecke np nach p_1 und p_2 ab, ziehe p_1 L und p_2 R, so schneiden diese nV und nW in m und o; die Senkrechten in m und o treffen pV und pW in r und s; ziehe noch sV und rW bis zum Schnitt in t, so ist das perspektivische Bild des Würfels fertig.

pt muß in der Verlängerung nach Dg gehen; die unsichtbaren Würfelkanten können leicht nachgeholt werden.

§ 37. Nachdem wir die Eigenschaften und die Aufsuchung der Hilfspunkte kennen gelernt haben kommen wir zu deren Verwertung. Hauptsache ist dabei, daß alle Hilfspunkte auf unsere Bildfläche selbst zu liegen kommen.

§ 38. Da aber der Abstand größer sein soll, als das Bild breit, so würde dieser immer außerhalb der Bildfläche liegen. Diesem Uebel wird abgeholfen dadurch, daß wir mit dem halben Abstand ($D/_2$) oder irgend einer Teilstrecke davon ($D/_3$ $D/_4$) arbeiten.

Fig. 23. Wir haben die Wagrechte mn und sollen ihre Länge auf nA von n aus abtragen; man zieht m

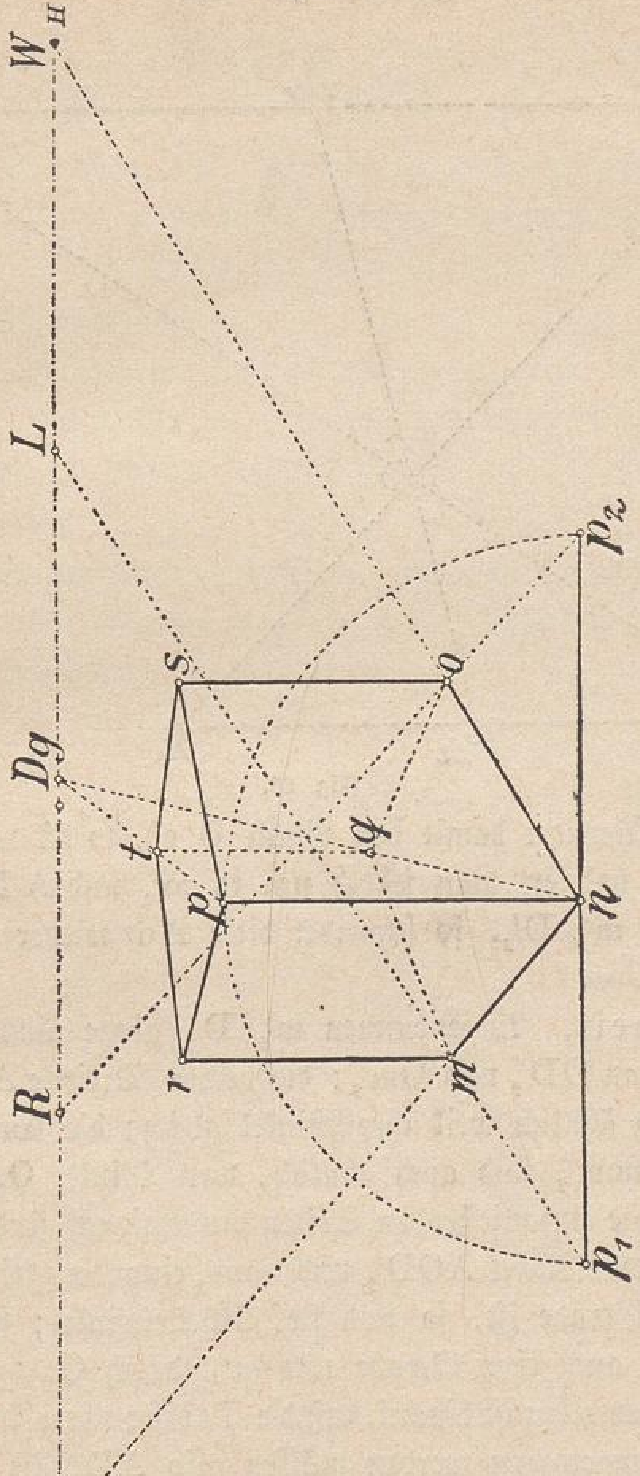


Fig. 22.

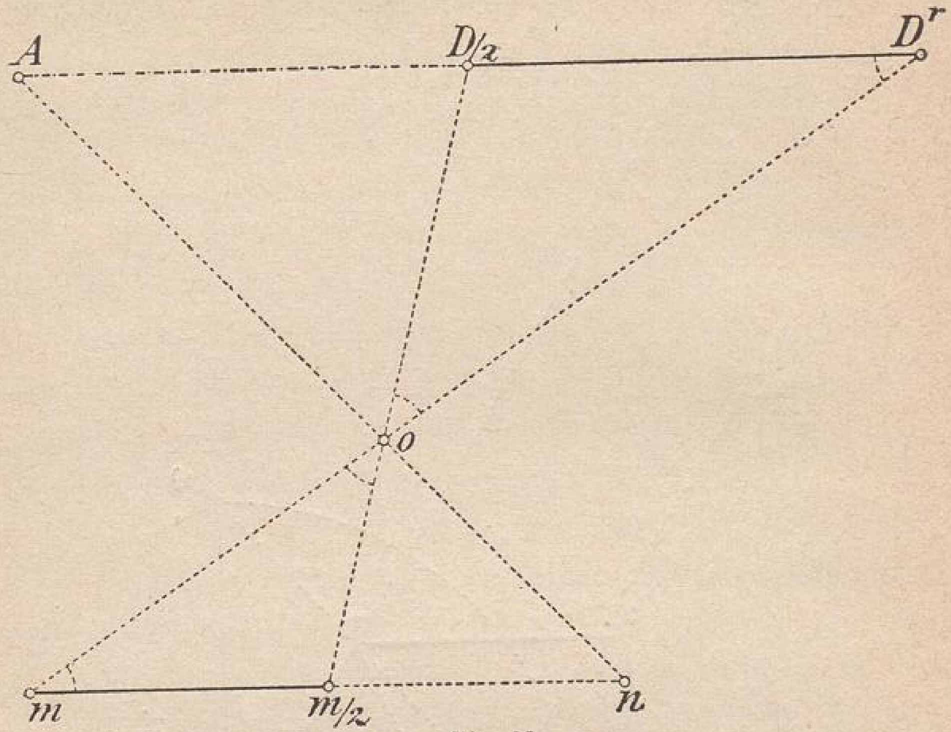


Fig. 23.

D^r und schneidet damit den Punkt O ab, so ist wie bekannt no=nm; halbiert man jedoch nm in $m/_2$ und A/D^r in $D/_2$ und zieht $m/_2$ $D/_2$, so schneidet diese An wieder im selben Punkt O.

Beweis. Angenommen $m/_2$ $D/_2$ ginge nicht durch O, so ziehe man $OD/_2$ und $Om/_2$; die beiden Dreiecke AOD^r und mon sind ähnlich weil ihre Winkel gleich; die Dreiecke AO $D/_2$ und $nom/_2$ sind auch ähnlich, weil Winkel $OAD/_2$=on $m/_2$ und die einschließenden Seiten proportional sind; es sind also auch die Winkel $AOD/_2$ und $nom/_2$ einander gleich, und da An eine Gerade ist, so sind sie Scheitelwinkel; folglich ist $m/_2$ $OD/_2$ auch eine Gerade und geht durch O.

Zu bemerken ist hierbei, daß die Teilstrecken immer von An aus angetragen werden müssen also $AD/_2$ ist der halbe Abstand und $nm/_2$ ist die halbe hineinzutragende Strecke.

§ 39. In ähnlicher Weise lassen sich auch die **Teilstrecken der Teilpunkte** verwenden.

Fig. 24. **Gegeben sei** mn **als wagrechte Gerade,** no **als perspektiv. Richtung mit dem Teilpunkt** R; **die Strecke** mn **soll von** m **aus auf** mV **abgetragen werden.**

Dreiteilen wir mn von m aus in $n/_3$ und VR von V aus in $R/_3$ und ziehen $n'_3\ R/_3$, so schneidet diese (aus demselben Grund wie bei der letzten Aufgabe) auf mV den Punkt o ab wie nR.

Daraus geht hervor, daß man auch mit jeder Teilstrecke der Teilpunkte arbeiten und so die Hilfspunkte in jedem Falle auf das Papier bringen kann.

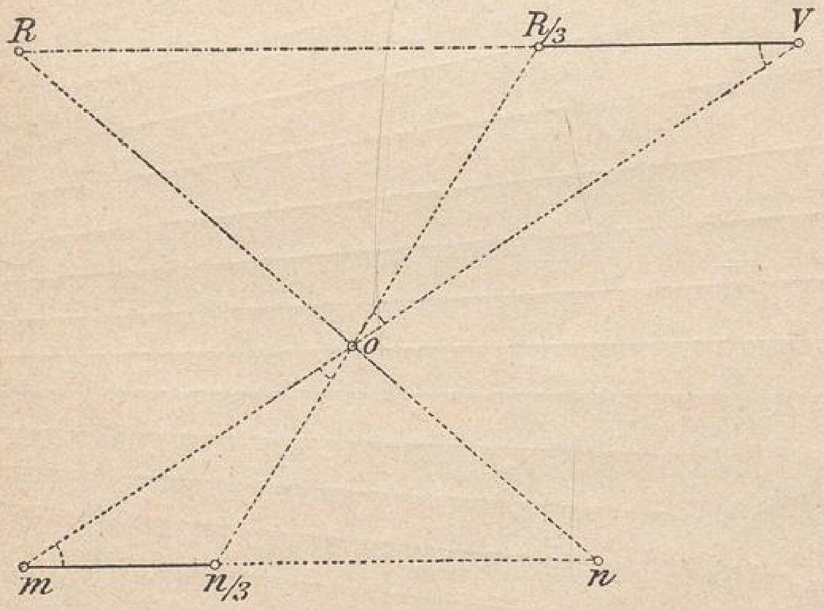


Fig. 24.

§ 40. Parallele, deren Fluchtpunkt nicht mehr auf die Bildfläche fällt.

Fig. 25. Hat man eine persp. Gerade von der Richtung m n, deren Fluchtpunkt auf der Bildfläche nicht mehr zugänglich ist, und man soll dazu Parallele ziehen, so lote man von m und n nach H H und teile m o und n p in die gleiche Anzahl Teile; das Antragen dieser Teile kann über die Augenhöhe hinaus beliebig fortgesetzt werden. Wenn man jetzt die entsprechenden Punkte also 1 mit 1, 2 mit 2 verbindet, so erhalten wir Linien, die nach demselben Fluchtpunkt gehen.

Innerhalb dieser Schar von Parallelen kann man dann annähernd genau die Richtungen ziehen.

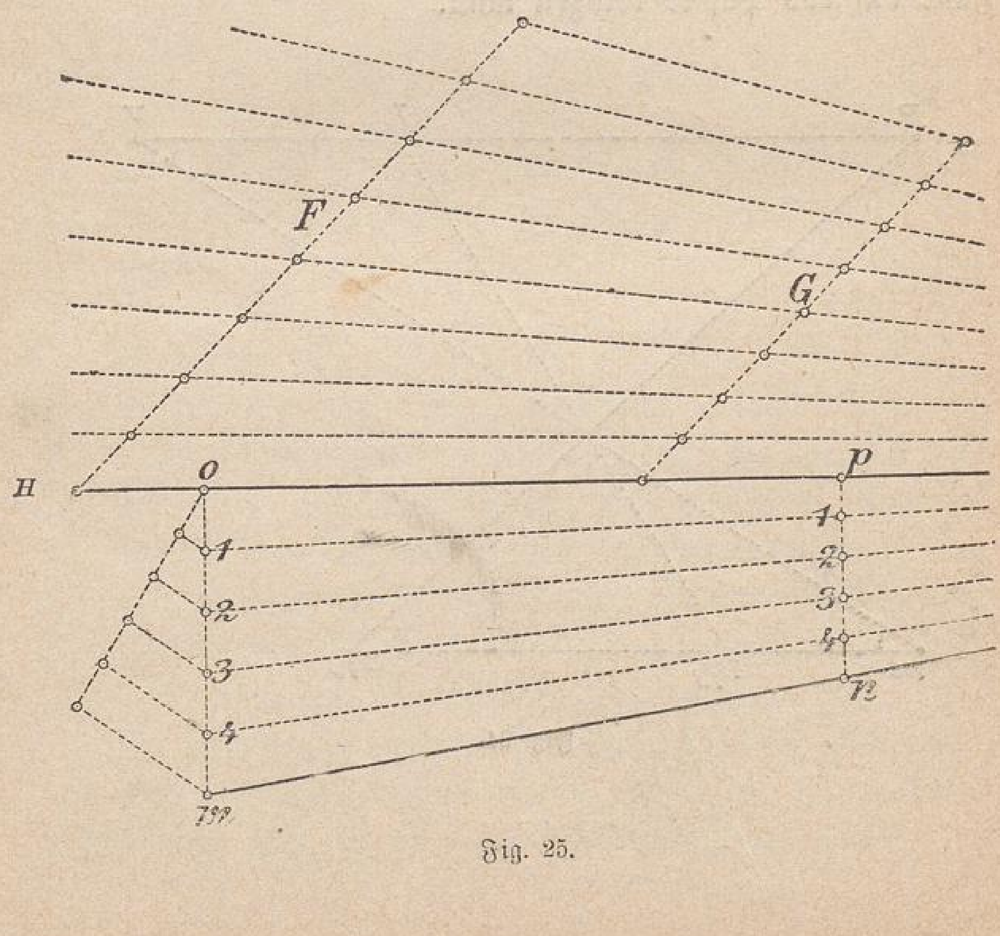


Fig. 25.

Die Teilung kann auch auf beliebig schief schneidenden, geometrisch Parallelen wie hier bei F und G ausgeführt und nach Belieben erweitert werden.

§ 41. Ueber Fluchtpunkte des rechten Winkels.

Der wagrechte rechte Winkel kann jede Lage haben; geht der eine Schenkel nach dem Hauptpunkt, so geht der andere in der Richtung der Bildfläche, geht der eine nach dem Abstand links, so muß der andere nach dem Abstand rechts gehen; je mehr sich der eine Schenkel nach der Sehachse nähert, um so weiter entfernt sich der andere von ihr. Es kann daher sehr leicht eintreten und ist für gewöhnlich der Fall, daß einer der Fluchtpunkte außerhalb der Bildfläche liegt, und der zugehörige rechte Winkel bestimmt werden soll.

§ 42. Fig. 26. Gegeben sei H H, A, $D/_3$. Zu der persp. Wagrechten m n soll bei m ein rechter Winkel angelegt werden.

Man ziehe m A und m D'_3 außerdem durch n eine Wagrechte, welche die beiden zuletzt gezogenen Linien in o und p schneidet; in o errichte eine Senkrechte auf n p und mache o q = 3 o p; lege nun an n q einen geometrisch rechten Winkel an, dessen zweiter Schenkel die Wagrechte aus n in r trifft, so ist n m r der gesuchte perspektivische rechte Winkel.

n q r ist das verkleinerte rechtwinklige Dreieck des großen, das seine Spitze im Fußpunkt gehabt hätte, und dessen Katheten auf H H weiter außen die Fluchtpunkte V und W abgeschnitten hätten.

§ 43. Fig 27. Gegeben sei H H, A und $D/_3$ An beliebigem Punkt m soll ein rechter Winkel

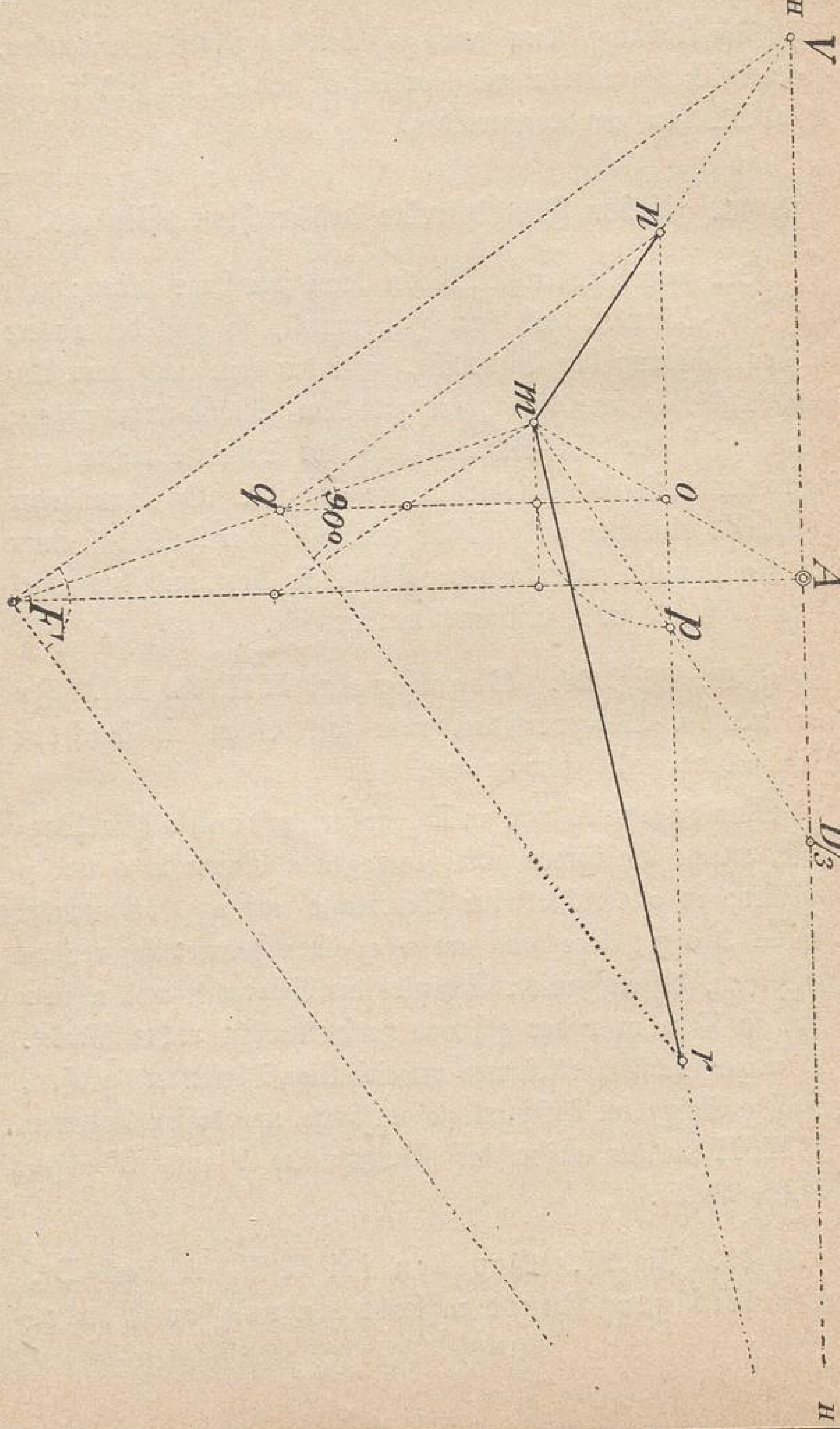


Fig. 26.

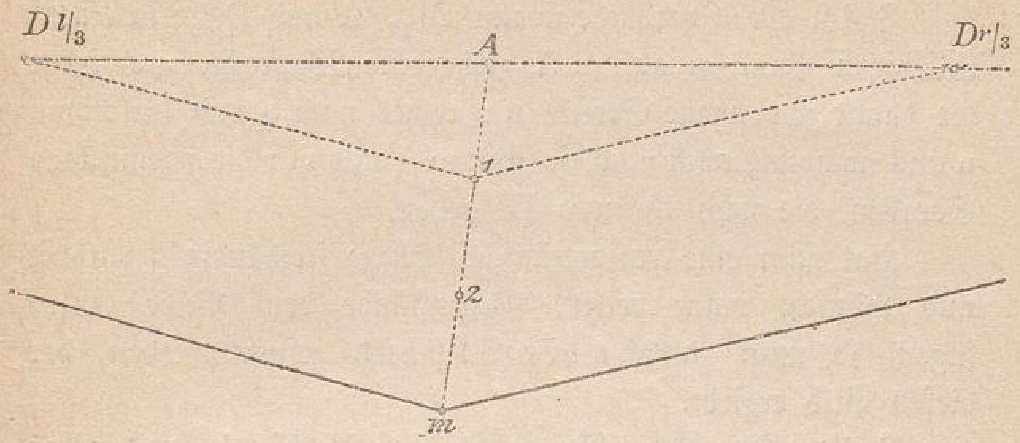


Fig. 27.

gezeichnet werden, dessen Schenkel nach den außerhalb liegenden Punkten D^r und D^l gehen.

Lösung I. Man ziehe A m, und dreiteile diese Strecke in 1 und 2, verbinde 1 mit $D^r/_3$ und $D^l/_3$, so sind die durch m dazu gezogenen geometrisch Parallelen die Schenkel des gesuchten rechten Winkels.

Lösung II. Fig. 28. Gegeben sei wieder H H, A, $D/_2$ und durch Punkt m sollen die Richtungen nach D^r und D^l bestimmt werden.

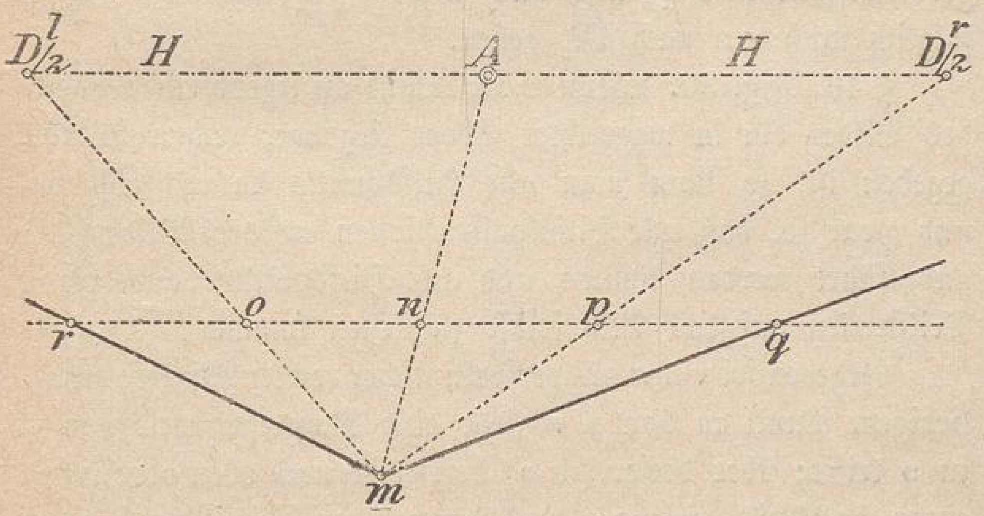


Fig. 28.

§ 44. Man verbinde m mit $D^l/_2$, A und $D^r/_2$; in einem beliebigen Punkt n auf m A ziehe eine Wagrechte und trage die damit gewonnene Strecke n p rechts nach q und links von o aus nochmals nach r ab, so sind m q und m r die gewünschten Geraden, die nach D^r und D^l gehen.

Hat man eine perspektivische Skizze freihändig gezeichnet und wünscht man weitere Gegenstände dem Bilde einzufügen, so muß zunächst der Abstand gesucht werden, der dieses Bild ergiebt.

§ 45. Fig. 29. Gegeben sei H H, A und eine perspektivische Linie m n, ebenso ihre geometrische Größe m o; gesucht der Abstand.

Man ziehe A n mit Verlängerung bis zum Schnitt mit der Wagrechten m o in p; errichte in p eine Senkrechte, welche von dem aus m mit m o beschriebenen Bogen in q getroffen wird; klappe nun von p aus, auf p m, $^1/_2$ p q nach r um und ziehe r n bis zur Augenhöhe in $D/_2$. Die verlängerte n o ergiebt auf H H den Teilpunkt rechts R.

Das persp. Dreieck m o n ist hier offenbar gleich dem geometrischen m o q, also auch n p = p q und r p = n p; folglich muß r n nach $D/_2$ gehen.

§ 46. Fig. 30. Wenn H H, A und an irgend einer Stelle des Bildes ein in wagrechter Ebene liegender rechter Winkel gegeben ist, so kann man alle Hilfspunkte daraus ableiten, und zwar so, daß alle Hilfskonstruktionen auf dem Bilde selbst ausgeführt werden können und alle Hilfspunkte bezw. deren Teilstrecken auf das Bild selbst zu liegen kommen.

Gegeben sei v n w als perspektivischer rechter Winkel; an beliebigem Punkt m von n v ziehe eine Wagrechte welche n w in o trifft; über dieser (m o) beschreibe nach oben oder unten einen Halbkreis, ziehe n A und durch deren Schnittpunkt p auf

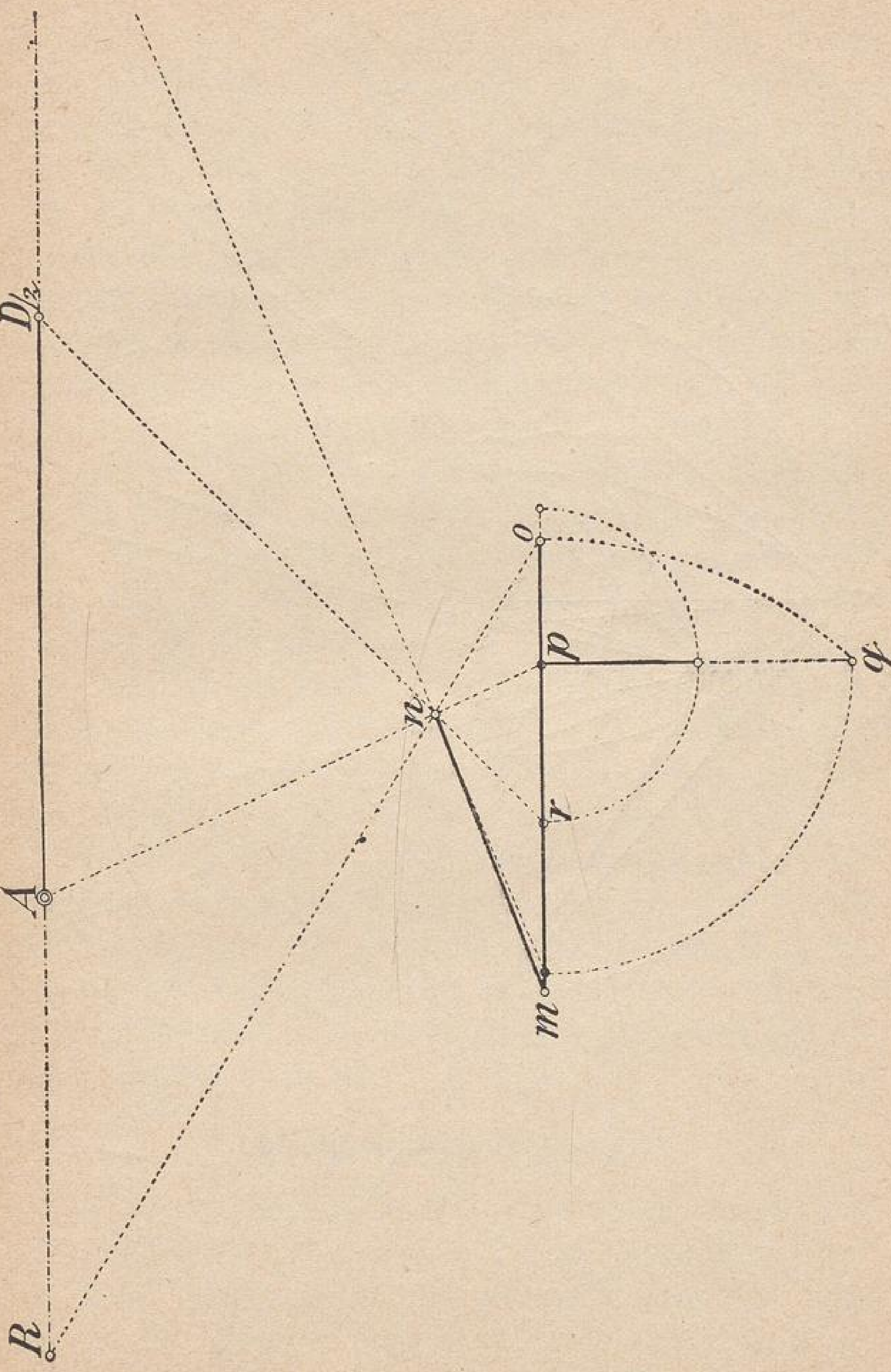


Fig. 29.

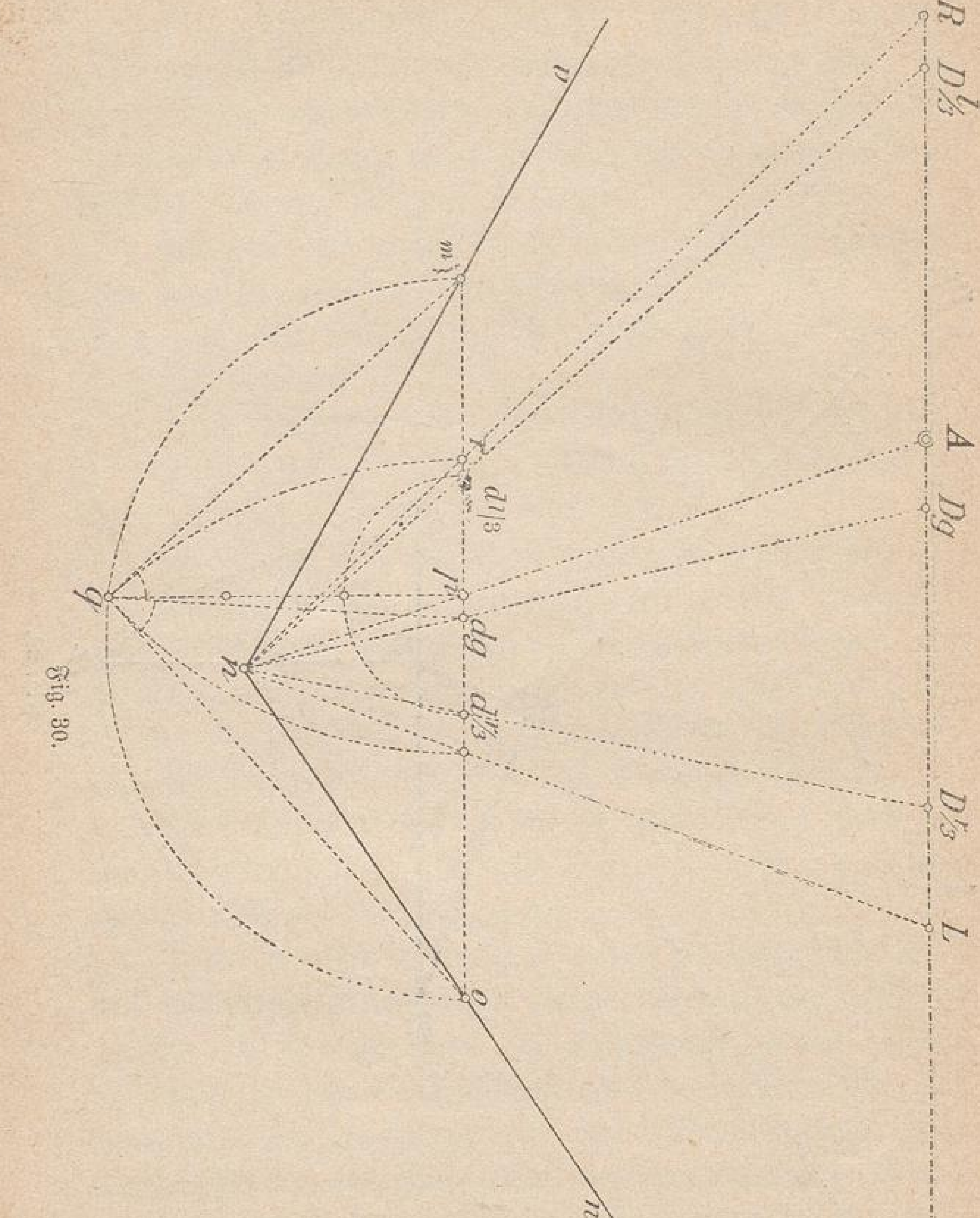


Fig. 30.

mo eine Senkrechte bis zum Schnitt mit der Kreislinie in q, so bezeichnet m q o den durch m n o dargestellten rechten Winkel.

Klappt man jetzt von p aus die Strecke p q nach links und rechts auf die Wagrechte nach d^l und d^r um und zieht $nd^l\,d^l$ und $n\,d^r$ mit Verlängerung, so treffen diese H H in D^r und D^l; klappt man irgend eine Teilstrecke von p q also z. B. $p\,q/_3$ auf die Wagrechte nach $d^r/_3$ und $d^l/_3$ um, so würde die verlängerte $n\,d^r/_3$ und $n\,d^l/_3$ die Augenhöhe in $D^r/_3$ und $D^l/_3$ schneiden. Der Abstand ist hiemit gefunden.

Ferner beschreibt man aus o mit o q einen Bogen q r bis zur Wagrechten, und zieht n r bis zur Augenhöhe, so ist damit der Teilpunkt R gefunden; nimmt man nur einen Teil z. B. $o\,q/_2$ und beschreibt mit dieser von o aus einen Bogen nach $r/_2$ auf der Wagrechten mo, so würde die verlängerte $n\,r/_2$ auf HH den Punkt $R/_2$ liefern; auf entsprechend gleiche Weise erhält man den Teilpunkt links L und Teilstrecken wie $L/_2$; halbiert man endlich den rechten Winkel m q o durch eine Gerade, welche m o in d g trifft, und zieht n d g bis zum Schnitt mit H H in D g, so ist damit der Diagonalpunkt gefunden und sämtliche Hilfspunkte bestimmt. Der Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion wird geführt durch den Hinweis auf die Aehnlichkeit der kleinen geometrischen Dreiecke an der Wagrechten m o mit den großen zugehörigen perspektiven Dreiecken an H H.

Perspektivische Teilung.

§ 47. In Fig. 31 sei M N als beliebige perspektivische Wagrechte gegeben; sie soll z. B. in drei Teile geteilt werden.

Man ziehe durch M eine geometrisch Wagrechte, trage auf ihr drei gleiche (beliebig große) Teile nach 1, 2, 3 ab; von 3 ziehe durch N nach der Augenhöhe in X und 1 X, 2 X,

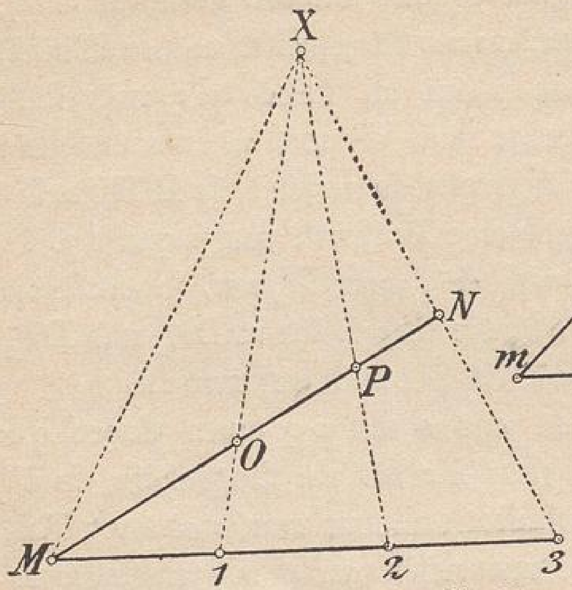


Fig. 31.

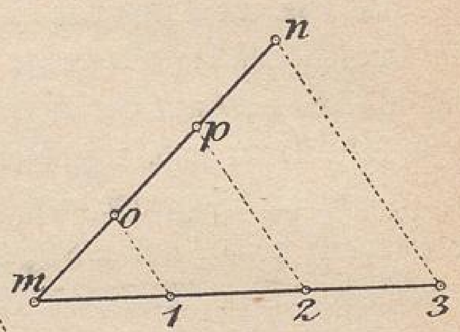


Fig. 31 b.

so teilen diese letzteren Linien M N in O und P in drei gleiche Teile.

Der Vorgang ist hierbei geometrisch gezeichnet derjenige der nebenstehenden Figur 31b. An die schiefe Gerade m n wurde eine Wagrechte angelegt und auf dieser von m aus drei gleiche Teile in 1, 2, 3 aufgetragen; 3 ist mit n verbunden und dann zu 3 n durch 1 und 2 Parallelen gezogen worden; es sind damit ähnliche Dreiecke entstanden und daher auf m n auch gleiche Teile abgeschnitten worden.

§ 48. Da die Teile M 1 beliebig groß angenommen wurden, so würde also ein größerer oder kleinerer Teil M 1, einen andern Punkt X auf der Augenhöhe ergeben haben und es erhellt daraus, daß entsprechend uns jeder andere Punkt X auf H H dieselben Dienste thut.

§ 49. Fig. 32. Ist die Aufgabe gegeben, die perspektivische wagrechte Gerade M N im Verhältnis 2 : 3 zu teilen, so ziehen wir an M eine Wagrechte, tragen auf diese fünf

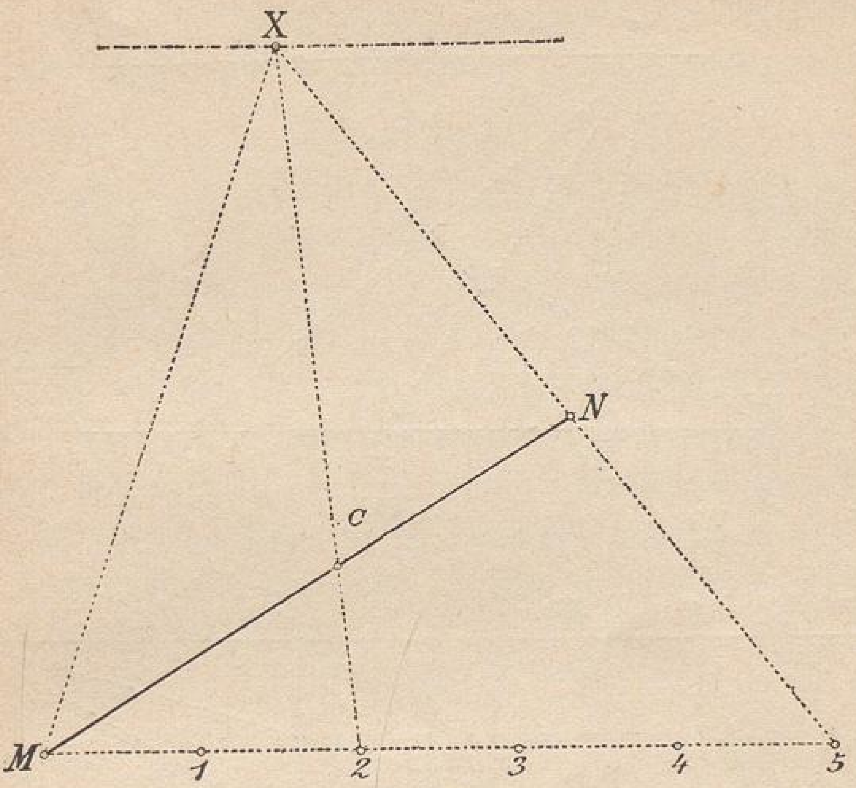


Fig. 32.

gleiche, beliebig große Teile nach 1, 2, 3, 4, 5 auf, ziehen von 5 durch N nach H H in X und teilen M N durch die Gerade X 2 in C. Jetzt verhält sich nach obigem Beweis M C : N C wie 2 : 3.

§ 50. In Fig. 33 sei die Aufgabe gestellt, auf der perspektivischen Wagrechten M N die perspektivisch gegebene Strecke M O dreimal aufzutragen, so ziehen wir einfach an M eine Wagrechte, schneiden diese durch eine aus beliebigem Punkt X auf H H gezogene Gerade X O in Punkt 1; tragen M 1 auf der Wagrechten noch zweimal nach 2 und 3 ab, ziehen 2 X und 3 X, so schneiden diese auf M N die Strecken O P und P Q ab, welche perspektivisch gleich mit M O sind.

§ 51. Fig. 34. Die perspektivische Strecke B C soll mehrmals auf ihrer Verlängerung angetragen werden.

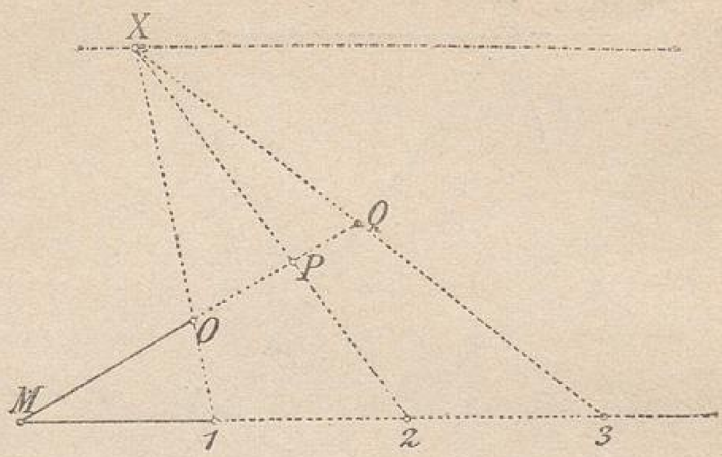


Fig. 33.

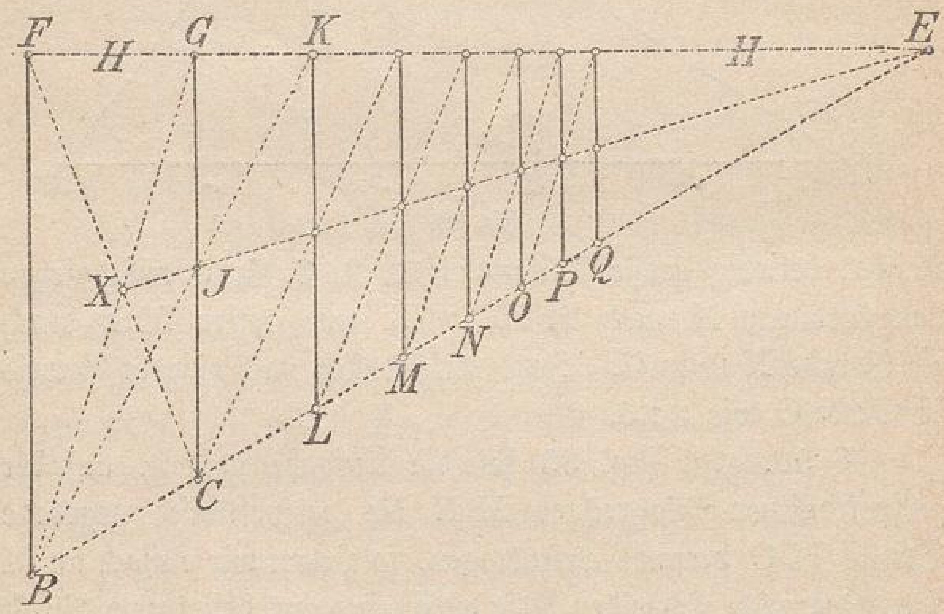


Fig. 34.

Man lote B und C nach H H in F und G; F C und B G schneiden sich in X, eine Gerade von X nach dem Fluchtpunkt E von B C trifft C G in J; die verlängerte B J ergiebt auf H H den Punkt K; dieser auf B C heruntergelotet den Punkt L; C L ist nun gleich B C; dasselbe Verfahren kann nach Belieben fortgesetzt werden, um die Punkte M, N, O. 2c. zu erhalten, die alle auf B E gleiche Strecken abschneiden.

Der Kreis.

§ 52. Liegt ein Kreis in der Bildebene, so ist und bleibt er auch im Bilde ein Kreis; liegt er in einer dazu parallelen Ebene (genannt Ansichtsebene oder Frontebene), so wird er wieder eine ähnliche Figur, also auch ein Kreis.

Fig. 35 stellt eine Walze dar mit Halbmesser o m und Achsenlänge o n. Zieht man nun n p, so hat sich der Halbmesser bei n schon zu n p verkürzt; der Kreis um n mit n p ist ein zum Kreis um o paralleler und die von A an die beiden Kreise gezogenen Tangenten bilden die Umriß-Mantellinien der Walze.

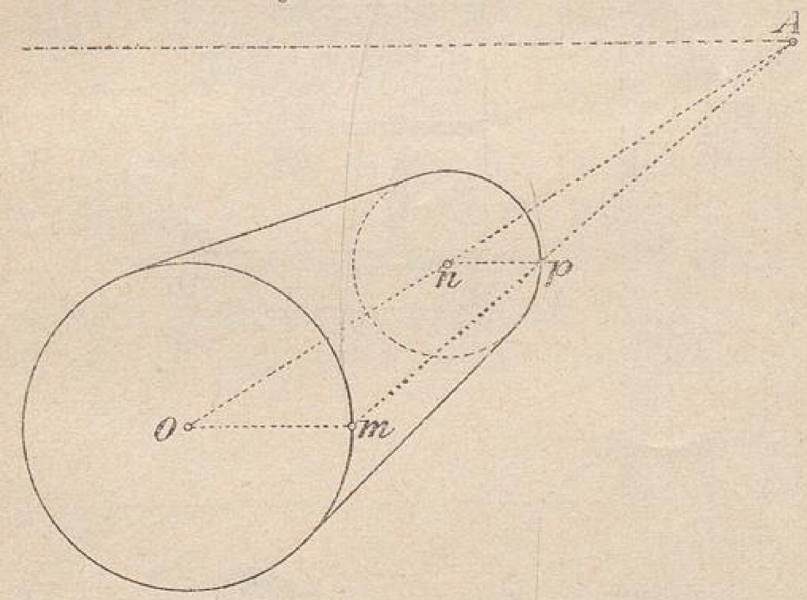
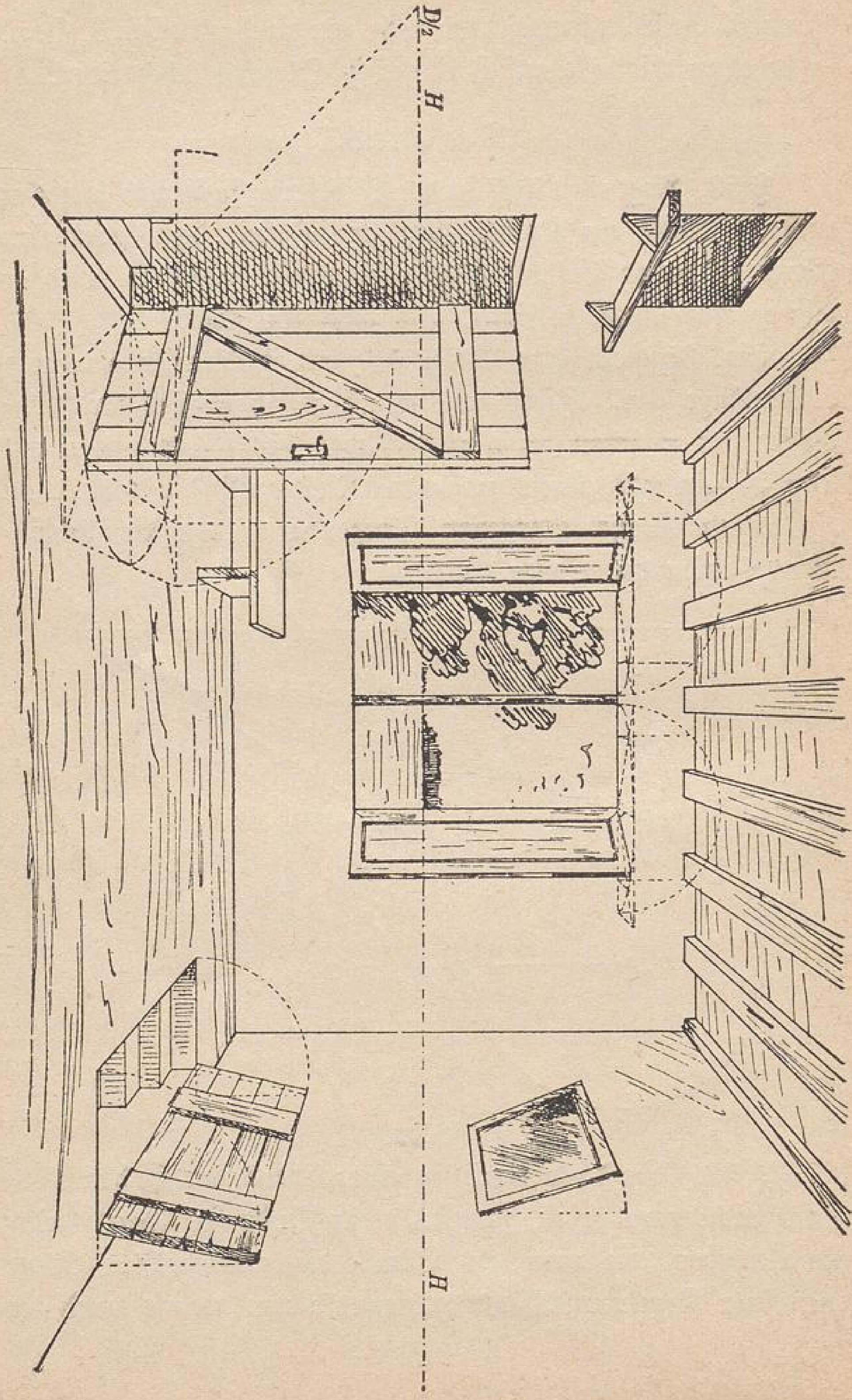


Fig. 35.

§ 53. Liegt der Kreis in einer Ebene, welche der Bildebene nicht parallel ist, so wird er im Bilde eine Kegelschnittlinie ergeben, die man als Schnitt dieser wagrechten Ebene mit einer Kegelmantelfläche auffassen kann, welche durch die


D/2
H
H

Summe der von A nach allen Punkten des Kreisumrisses möglichen Geraden gebildet ist.

Wie konstruiert man einen solchen Kreis?

Fig. 36. Angenommen man habe einen beliebigen, wagrechten G G in p berührenden, geometrischen Kreis um O, der in Perspektive gesetzt werden soll, so kann derselbe durch ein Quadrat m n s q umschrieben werden, so daß m q und n s senkrecht auf G G stehen und q s parallel G G läuft. Dieses Quadrat mitsamt seinen Diagonalen können wir in Perspektive setzen; die Mittellinien durch O treffen die Seiten in T Y U und p; diese vier Punkte sind schon Kreispunkte und die Quadratseiten Tangenten (Berührungslinien). Im geometrischen Riß schneidet der Kreis die Diagonalen des Quadrats in b c e f; diese Punkte auf G G gelotet ergeben hier H und J; zieht man jetzt H A und J A, so werden die Diagonalen des perspektiven Quadrats in B C E F geschnitten; diese Punkte sind wieder Kreispunkte; im geometrischen Riß haben die Punkte b c e f Tangenten unter 45°, im perspektiven Bilde haben diese Tangenten die Richtungen nach D^r und D^l; damit sind 8 Punkte und ihre Tangenten bestimmt und die perspektive Kreislinie kann freihändig eingezeichnet werden.

§ 54. Damit ist der Schlüssel für alle Kreiskonstruktionen gegeben; man sucht sich, welche Lage der Kreis auch haben möge, diese 8 Punkte und ihre Tangenten.

Für die Praxis ist die Kenntnis folgender 3 Aufgaben besonders wichtig.

Diese sind:

1. Konstruktion konzentrischer Kreise,
2. Konstruktion von Kreisen gleichen Durchmessers und verschiedener Höhe,

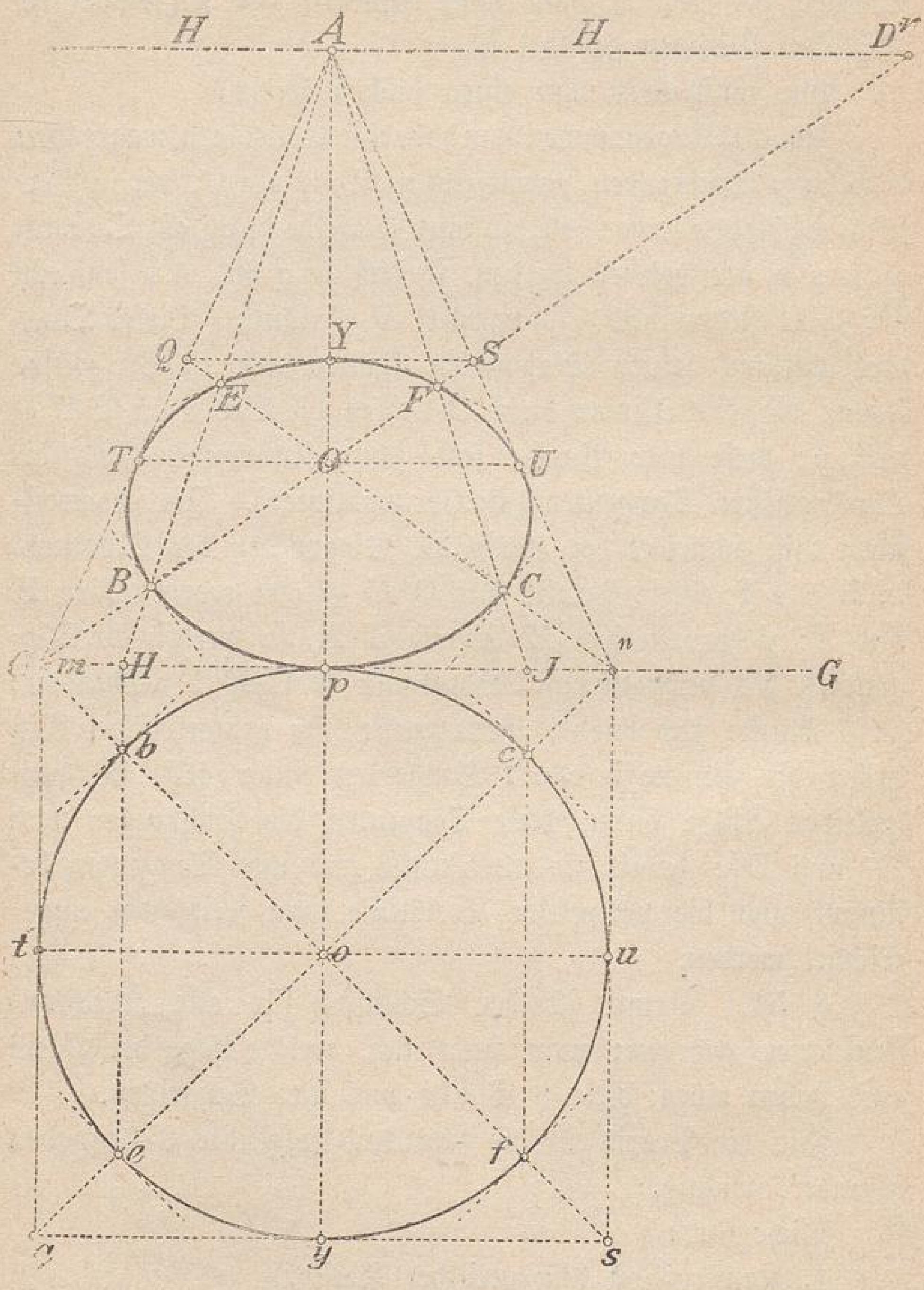


Fig. 36.

3. Kreisteilung.

Betrachtet man in der letzten Figur die Lage des Punktes H, bezw. das Verhältnis von p H zu p m näher, so wird man finden, daß für alle Kreise dieses Verhältnis ein feststehendes ist; denn alle Kreise sind sich ähnlich und alle Quadrate ebenfalls; dasselbe Verhältnis besteht auf der jenseitigen Quadratseite und auf der zu G G parallelen Mittellinie; ein Winkelmaßstab wie in Fig. 37 wo p m und p H die Längen der Schenkel sind, liefert also zu allen Quadratseiten oder Mittellinien die zugehörigen Abschnitte.

§ 55. Fig. 37. Gegeben sei ein perspektiv. Kreis

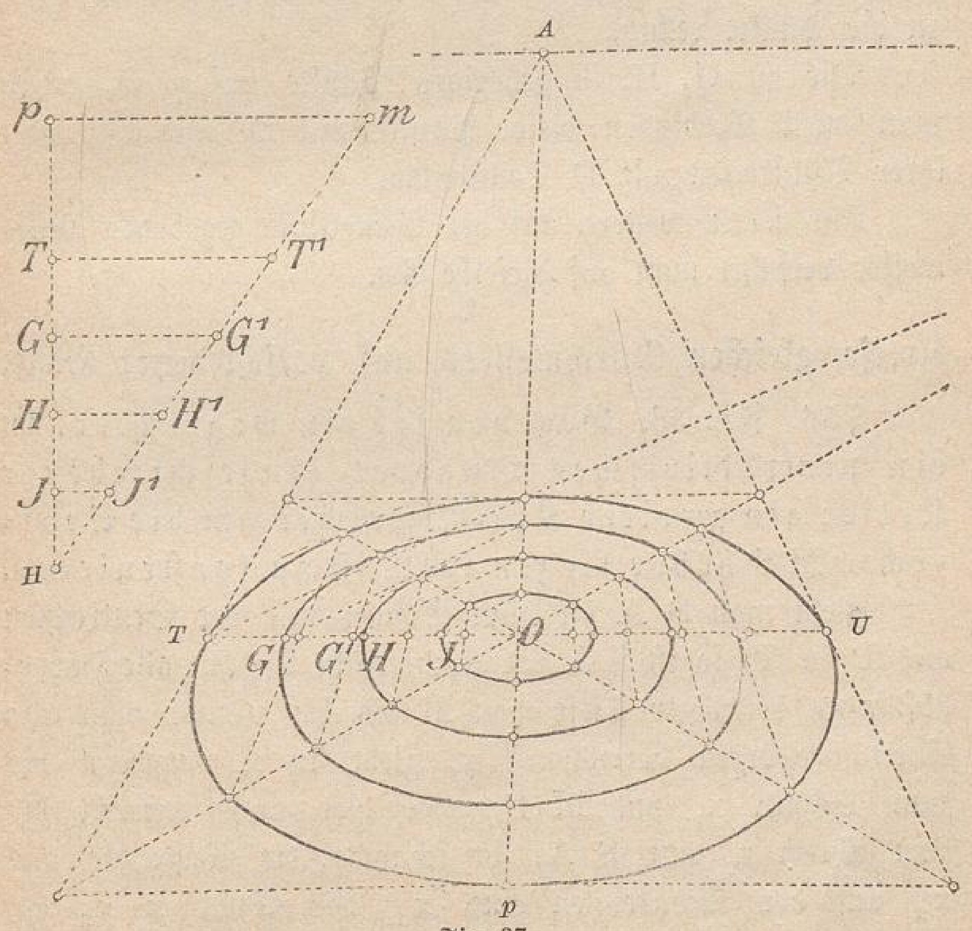


Fig. 37.

um O. Durch die Punkte G H J auf der Mittellinie T U, sollen konzentrische Kreise gezogen werden.

Man zeichne einen rechten Winkel außerhalb der Figur mit der Spitze p und mache die Schenkel gleich p H und p m, trage von H aus die Strecken O G, O H, O J auf H p ab und ziehe durch G, H, J die Parallelen zu p m, welche H M in G^1, H^1, J^1 schneiden; einem Halbmesser H G entspricht demnach ein Abschnitt G G^1; dieser wird auf O T von O aus nach G^1 angetragen und von G^1 bis zum Schnitt mit den Diagonalen unten und oben nach A gezogen; diese Schnittpunkte sind Kreispunkte; ihre Tangenten gehen nach D^r bezw. D^l; symetrisch nach p A liegen dazu die Punkte rechts.

Die zu G, H, J gehörigen Punkte auf p O, erhält man durch Verbinden dieser Punkte mit D^r und D^l, oder ihrer Teilstrecken mit D Teilstrecken.

Für jeden weitern auf der Mittellinie gegebenen Halbmesser verfährt man auf dieselbe Art.

Kreise gleichen Durchmessers auf verschiedener Höhe.

§ 56. Fig. 38. Gegeben sei ein wagrechter, in ein perspektivisches Quadrat eingeschriebener Kreis; ein zweiter Kreis, welcher um die Senkrechte M S höher liegen soll, ist zu konstruieren.

Zieht man S A bis zum Schnitt mit der Senkrechten aus P in T, so ist S A der geometrische Ort für alle Höhenabschnitte beliebiger Tiefe von M bis P; nimmt man also einen beliebigen Kreispunkt x, zieht in x, wagrecht bis zum Schnitt x_1 mit M P, von hier aus senkrecht bis zum Punkt x_2 auf S A, so schneidet die Wagrechte aus x_2 auf der Senkrechten aus x_1 das Stück x x_3 ab,

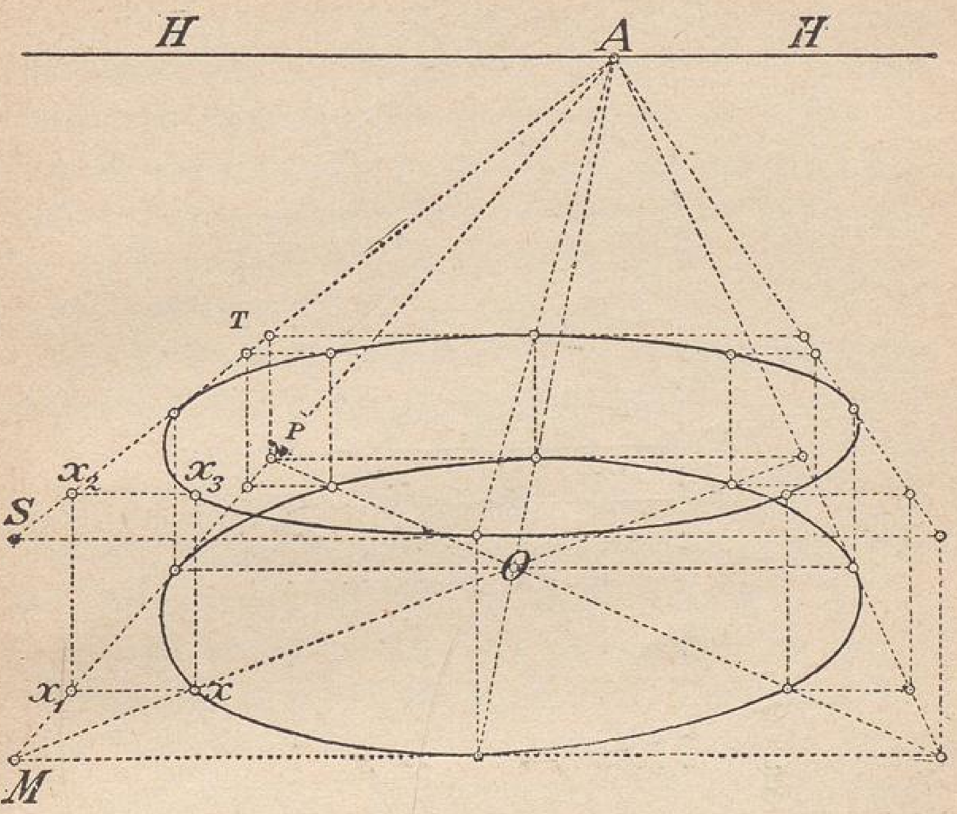


Fig. 38.

welches gleich x_1 x_2 und gleich M S ist. Den dazu symetrisch rechts liegenden Punkt kann man sofort bestimmen und durch Anwendung dieses Verfahrens beliebig viele Punkte des höher liegenden Kreises erzielen.

Kreisteilung.

§ 57. Fig. 39. Ein gegebener perspektivischer Kreis soll in eine beliebige Anzahl z. B. 16 Teile geteilt werden.

Man ziehe einen beliebigen geometrischen Halbkreis z. B. über M N Fig. 39 und vollziehe auf Viertelkreis M D die angegebene Teilung also hier in 4; verbinde die Punkte 1, 2, 3 mit N, so schneiden sie auf O D die Punkte I, II, III

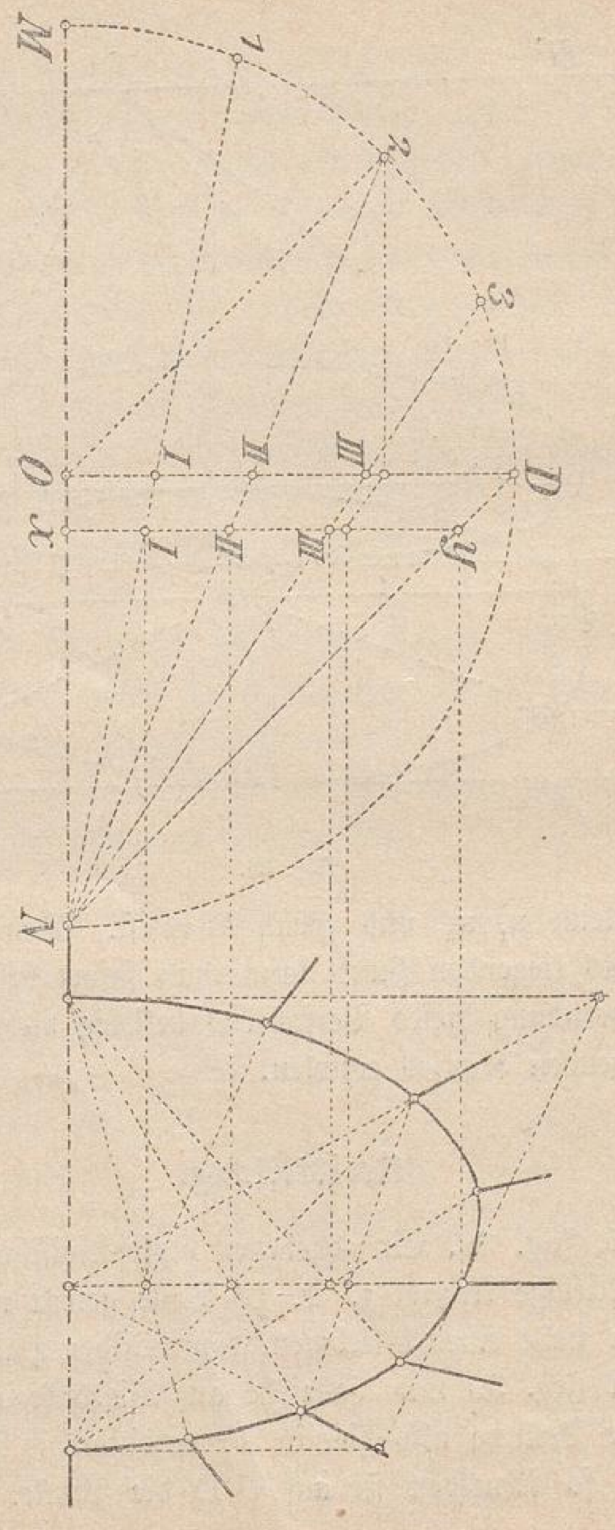


Fig. 39.

ab; die dadurch auf O D abgeschnittenen Strecken bilden ein feststehendes Verhältnis für alle Mittellinienabschnitte derselben Kreisteilung. Hat man also zufällig einen Kreis von der halben Mittellinie O D, so kann man ohne Weiteres diese Stücke auf die perspektive Mittellinie übertragen; ist die halbe Mittellinie aber nur so groß wie z. B. X Y, so wären die darauf liegenden Abschnitte zu übertragen.

Auf dieselbe Weise, wie eine Teilung in gleiche Abschnitte, läßt sich auch eine Teilung in ungleiche Abschnitte ausführen.

Die Kugel.

§ 58. Liegt der Mittelpunkt einer Kugel auf der Sehachse, so erhält man als Bild der Kugel einen Kreis.

Fig. 40. 41. 42. Bei jeder andern Lage der Kugel ergiebt sich eine Ellipse als Umrißlinie. Der Beweis hiefür ist leicht zu erbringen, wenn man sich durch die Kugel eine Anzahl senkrechter oder wagrechter Schnittebenen gelegt denkt und deren Schnittkreise durch eine berührende Umrißlinie umgiebt.

Fig. 43. Auf dieselbe Weise sind die perspektivischen Umrißlinien anderer Umdrehungskörper zu bestimmen.

Schiefe Ebenen.

§ 59. Fig. 44. Sind schiefe Ebenen wie Dachflächen zu zeichnen, so bestimmt man die hiezu notwendigen Punkte in ihrer Tiefenlage aus der Grundebene und die Höhen und Breitenlage aus der Bildebene. Bei besonders hoch liegenden schiefen Ebenen, wie Turmdächern, denkt man sich die Grundebene nach Belieben höher gerückt, konstruiert dort den Grundriß oder Schnitt und holt daraus die für das Bild notwendigen Punkte.

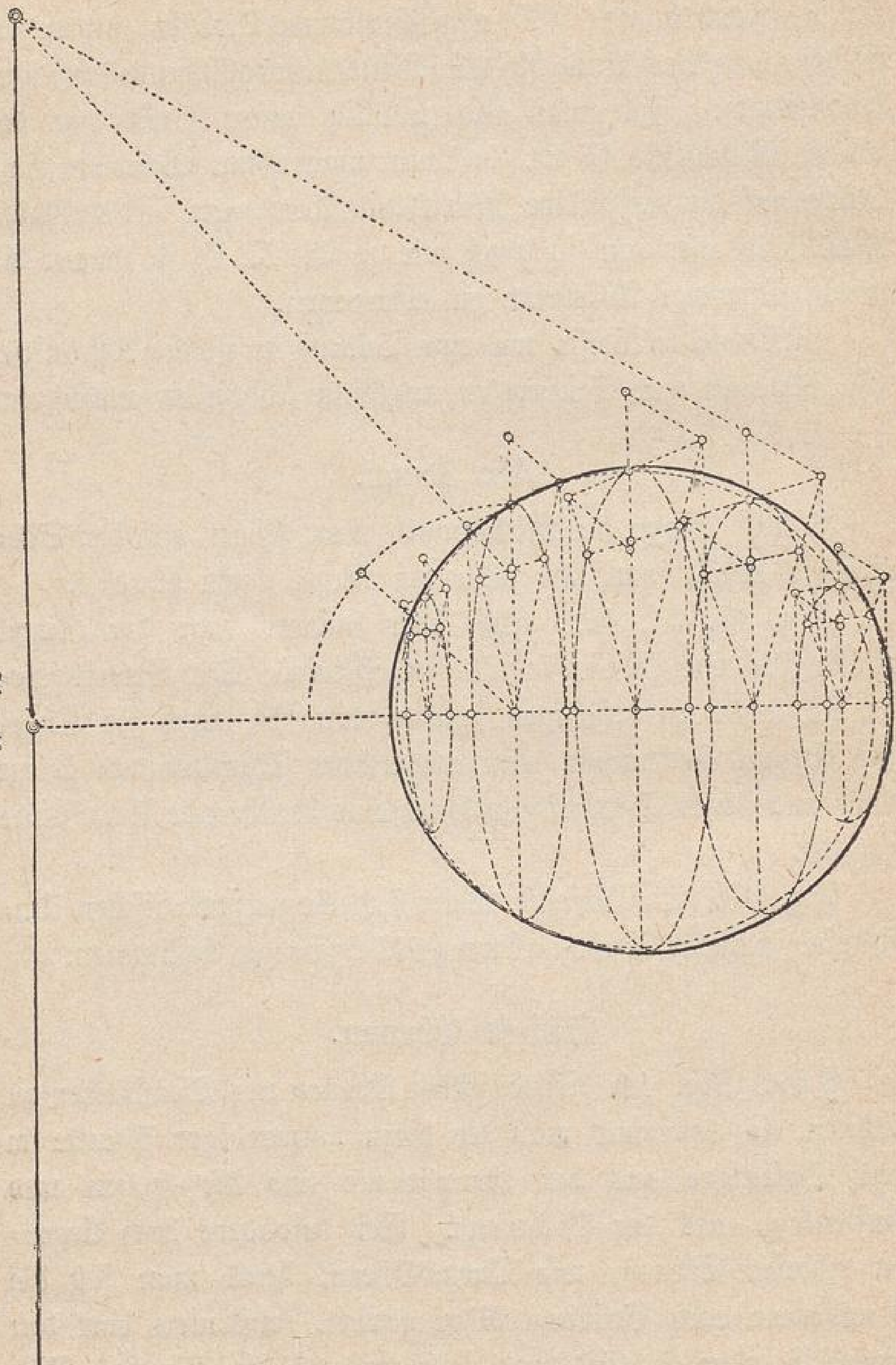


Fig. 40.

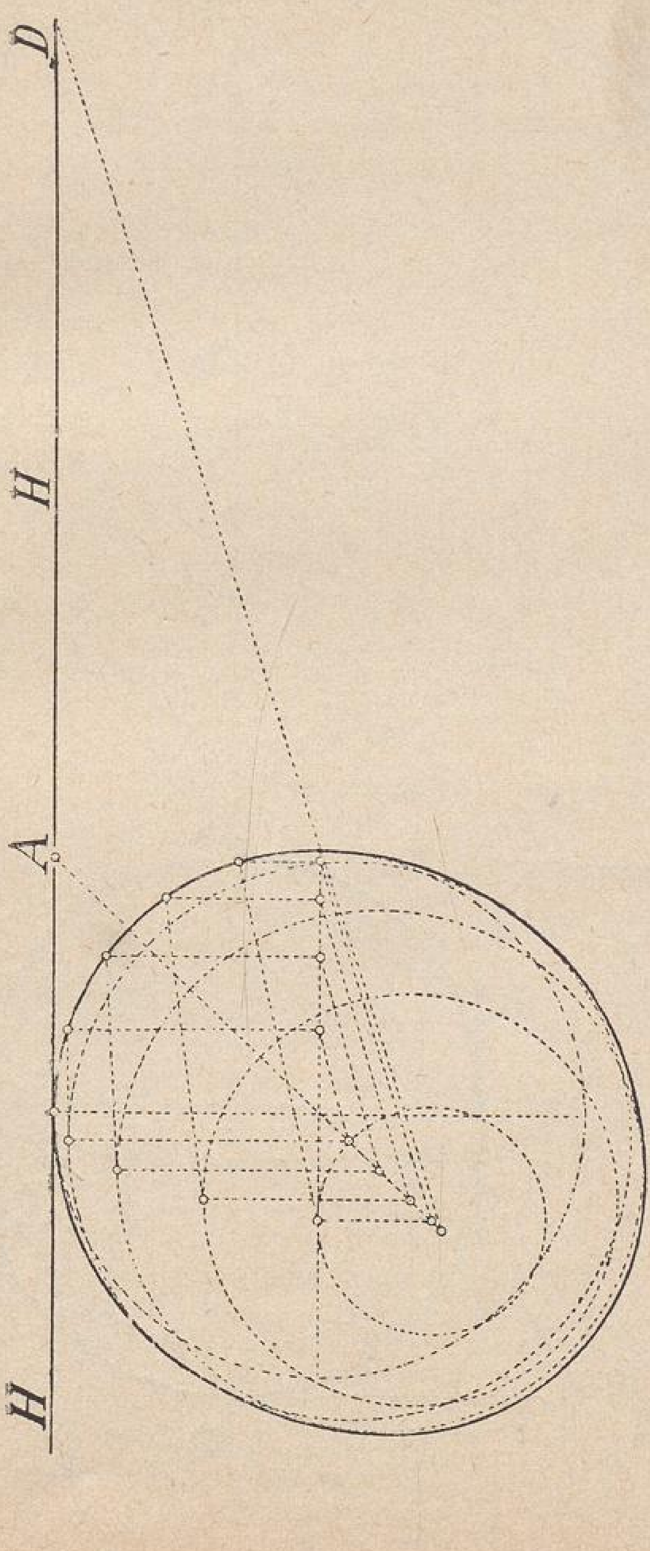


Fig. 41.

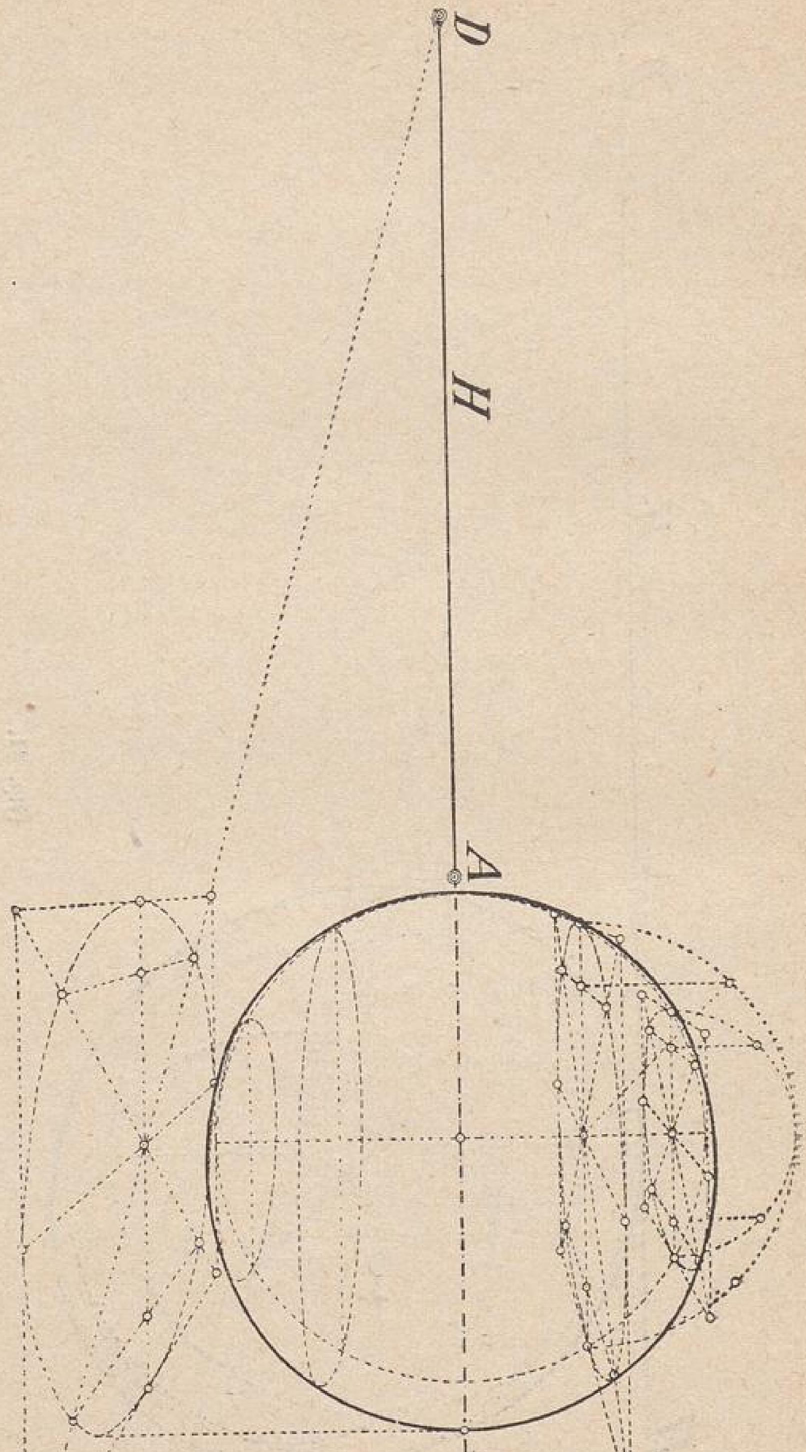


Fig. 42.

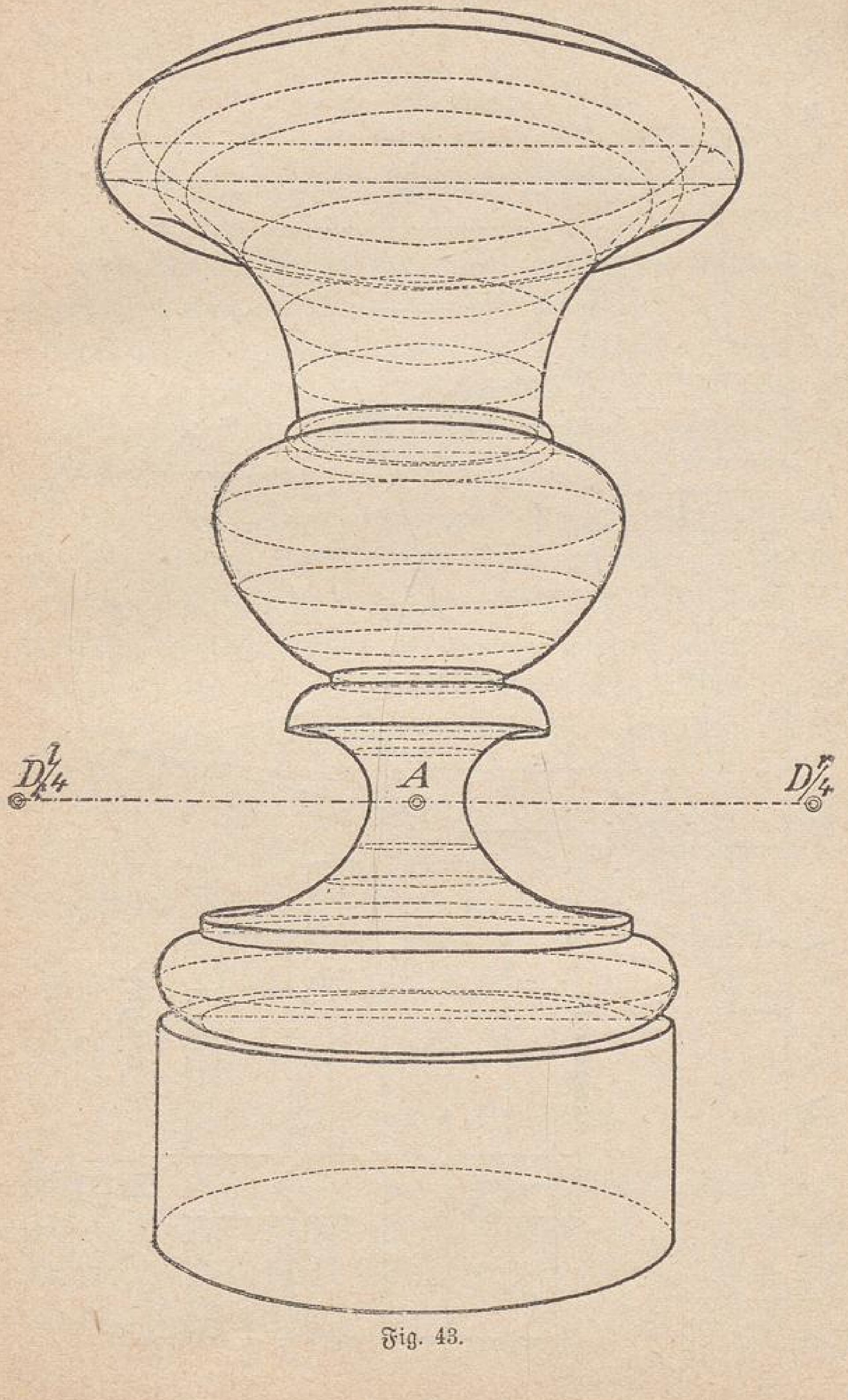


Fig. 43.

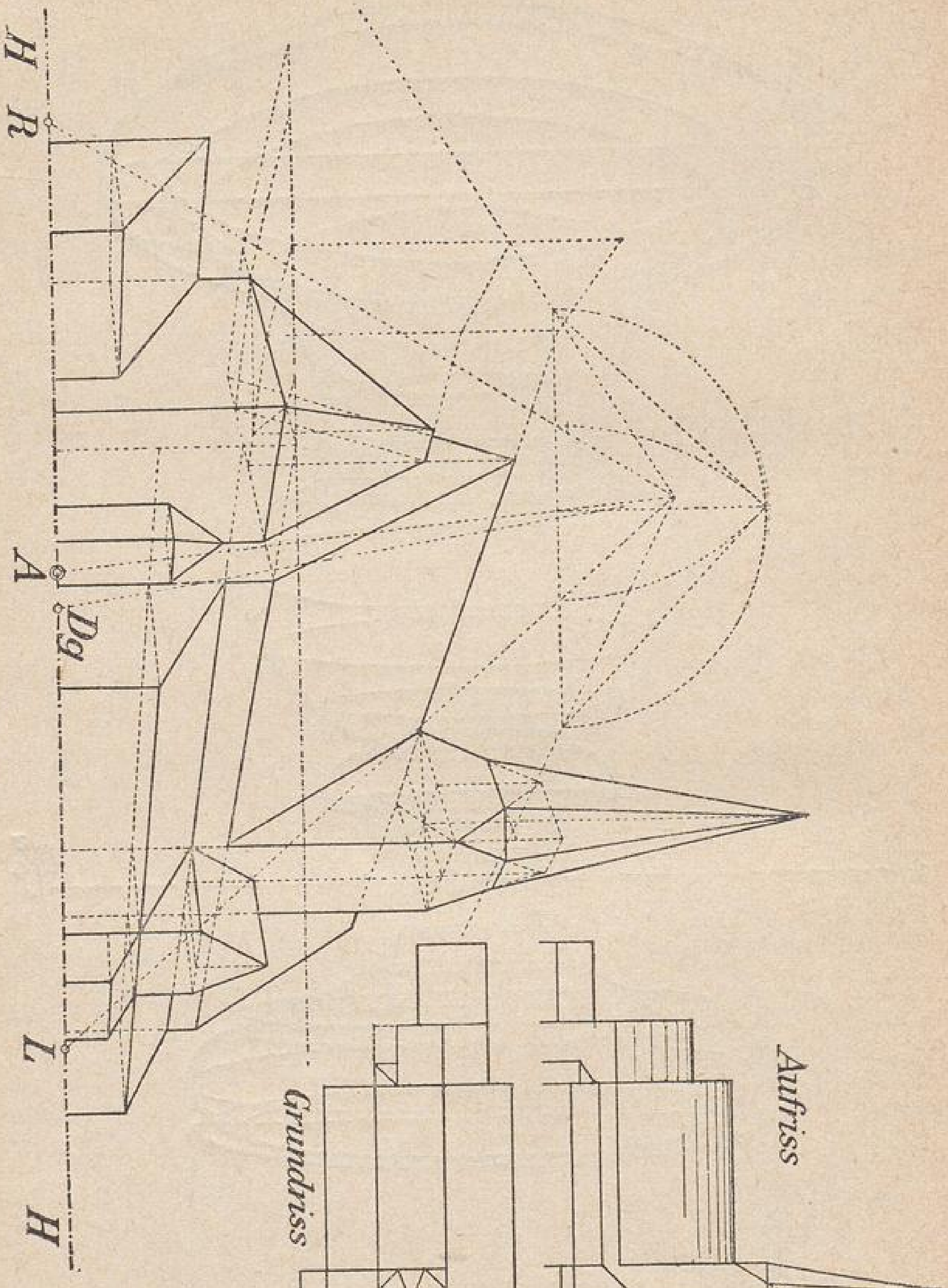


Fig. 44.