



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Perspektive**

**Freyberger, Hans**

**Leipzig, 1897**

XI. Kapitel. Anhang über geom. Schattenkonstruktion

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-78607](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-78607)

## XI. Kapitel.

## Schattenkonstruktion.

Was die Natur dem Auge bietet, kommt erst durch das Licht zur Erscheinung, und die verschiedenartige, mehr oder minder starke Beleuchtung der Körper läßt uns deren Formen erkennen und unterscheiden.

Bei zeichnerischen Darstellungen ist es daher von größter Wichtigkeit, die Geseze zu kennen, nach welchen die Wirkungen der Beleuchtung sich äußern. Das Licht, sei es künstliches oder Sonnenlicht, sendet seine Strahlen nach allen Seiten geradlinig aus; wo solche Strahlen auftreffen, ist die Fläche im Licht, wo nicht, da ist sie im Schatten; wir haben also Lichtflächen und Schattenflächen. Für die Lichtflächen kommt es darauf an, unter welchem Winkel der Strahl auftrifft, denn es ist klar, daß die Fläche da am hellsten ist, wo der Strahl senkrecht auftrifft, und daß mit der zunehmenden Neigung des Strahls die Helligkeit abnimmt. Wo der Lichtstrahl nicht mehr auftrifft, sondern nur noch berührt, ist die Grenze zwischen Licht und Schatten; diese Grenze nennt man Streiflinie.

Denkt man sich Fig. 73 Punkt L als Licht, so streifen die Strahlen irgendwo an der Oberfläche des Körpers A und bilden so die Streiflinie als Grenze von Lichtflächen und Schattenflächen am Körper selbst; diese Schattenflächen nennt man den Selbstschatten des Körpers.

Befindet sich hinter dem Körper A eine Ebene E, so wäre diese, falls Körper A nicht vorhanden wäre, ganz im Licht; Körper A verdeckt aber einen Teil des Lichts, weil die Lichtstrahlen ihn nicht durchdringen können; es entsteht

daher auf E ein dunkler Fleck und das ist der Schlag= schatten des Körpers A auf Ebene E.

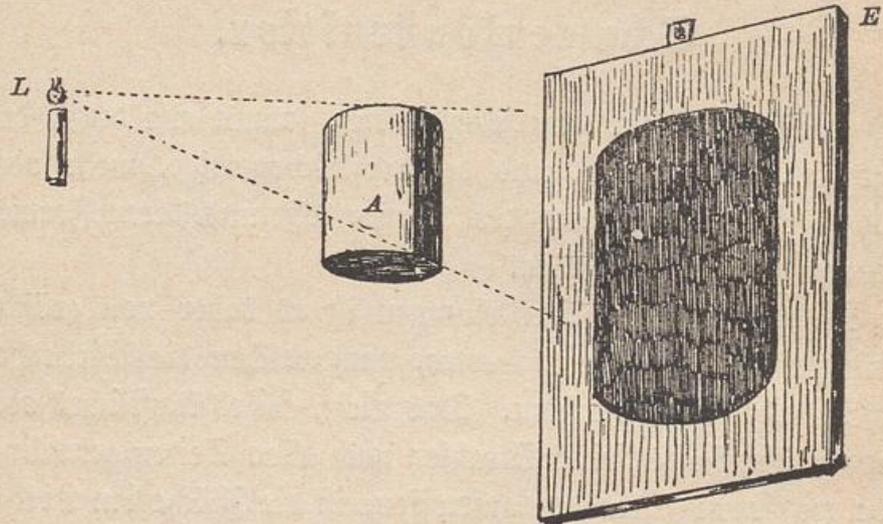


Fig. 73.

Unsere Aufgabe ist nun, die Grenzen dieser Schatten auf konstruktivem Wege zu ermitteln, um damit dem Zeichner ein Mittel zur wirksamen Darstellung von räumlichen Gebilden zu geben.

Man nimmt dabei Sonnenbeleuchtung an, und zwar so, daß die Projektionen (Lotungen) der Lichtstrahlen sowohl in der Aufriß= als in der Grundriß= Ebene in der Richtung von  $45^\circ$  zum Grundschnitt gehen. Die Strahlen kommen von links oben und gehen über die linke Schulter des Beschauers auf den Körper.

Bei Ausführung von Schattenkonstruktionen empfiehlt es sich den Körpern einen ganz leichten Lokaltön (etwa in gebrannter Siena) zu geben, die Selbstschatten nicht allzu dunkel (in Sepia oder Schwarz) und die Schlagschatten entsprechend dunkler (etwa 2mal den Ton der Selbstschatten) in derselben Farbe anzulegen. Für alle Zeichnungen ist der Bogen auf=

zuspannen; von der Normalkugel ab sind die Zeichnungen mit Lichtstufenlinien (Isophoten) und in feinerer Abstufung der Töne mit Beachtung der Reflexwirkungen auszuführen.

Zur Bezeichnung der Figuren sind im Aufsriß die großen, im Grundriß die kleinen Buchstaben angewendet; die Schattenpunkte sind gleichnamig mit den schattenwerfenden und mit dem Zeichen ' versehen, so daß also immer  $a'$  der Schattenpunkt von  $a$  ist; senkrecht unter einander liegende Punkte sind ebenfalls gleichnamig und nur durch Zahlen unterschieden, wie z. B.  $A_1$ ,  $A_2$  u. s. f.

### Beispiele.

#### Fig. 74. Halbes achteckiges Prisma mit Deckplatte.

Wie im Grundriß ersichtlich, treffen die Lichtstrahlen noch auf die von den Geraden  $ab$ ,  $bc$ ,  $cd$ ,  $gh$ ,  $hi$  und  $ik$  begrenzten Ebenen auf; im Selbstschatten liegen daher ohne weiteres die im Grundriß durch  $de$ ,  $ef$ ,  $kl$ ,  $lm$  bestimmten Ebenen.

Zur Konstruktion der Schlagschatten der Deckplatte auf der Rückwand ziehe man von Punkt  $l$  den Strahl unter  $45^\circ$ , bis er den Grundschnitt in  $n$  trifft, ferner den im Aufsriß zugehörigen Strahl aus  $L$ , bis die Senkrechte aus  $n$  in  $O$  getroffen wird;  $O$  ist jetzt der Schattenpunkt der Ecke  $L$  auf die Wandfläche. Weiter schattenwerfend auf die Wand ist die Kante  $KL$ , ihr Schatten wird von  $O$  abwärts senkrecht

Anmerkung. Vergleiche die Kugel in Sammlung Götschen Nr. 39, Zeichenschule Tafel X.

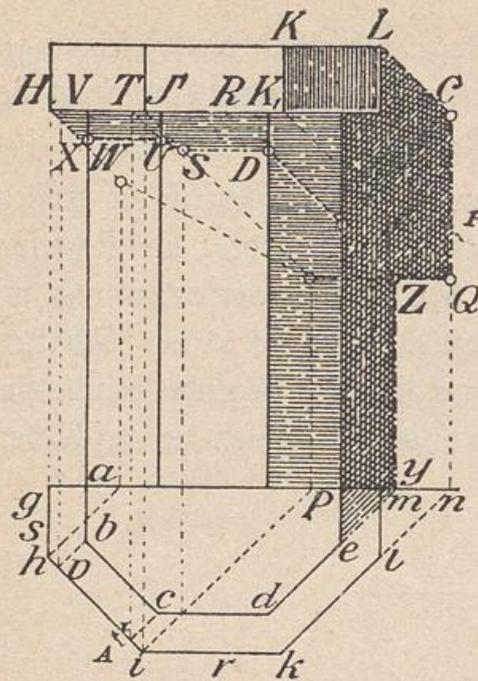


Fig. 74.

gehen bis zum Treffpunkt mit dem Strahl aus  $K$ ; jetzt übernimmt die Senkrechte  $KK_1$  die Streiflinie und wirft ihren Schatten ebenfalls senkrecht in die Verlängerung von  $OP$  nach  $Q$ , wo der Strahl aus  $K_1$  die Senkrechte aus  $n$  schneidet; von hier ab geht, wie die Streiflinie  $K_1J_1$  so auch ihr Schatten von  $Q$  aus wagrecht. Denkt man sich nun die auf  $de$  senkrechte Ebene herausverlängert, bis ihre Horizontalspur  $ik$  in  $r$  schneidet und durch  $a$  eine zu  $rm$  Parallele  $as$  gezogen, so ist sofort klar, daß die gebrochene Kante  $sir$  ihren Schatten nicht mehr auf die Wand, sondern auf das Prisma  $abcd$  werfen muß. Der Strahl aus  $R$  trifft die Prismenkante in  $D$ ; von hier aus geht die Richtung der Schattengrenze wagrecht bis zum Strahl aus  $J_1$  in  $S$ ; jetzt wird  $H_1J_1$  schattenwerfend und zwar werden die Ebenen  $ab$ ,  $bc$  und  $cd$  Teile des Schattens von  $H_1J_1$  bekommen. Der Schatten einer Geraden auf einer Ebene ist immer wieder eine Gerade; wenn man also den Schatten von  $H_1J_1$  auf Kante  $c$  hätte, so brauchte man nur diesen Punkt geradlinig mit  $S$  zu verbinden. Dieser Schattenpunkt wird gefunden, wenn man von  $c$  aus parallel zur Lichtstrahlenrichtung nach  $A$  herauszieht, den Punkt  $T$  senkrecht über  $A$  im Aufsriß bestimmt und aus  $T$  den Strahl  $TU$  zieht, so ist jetzt  $US$  der Schatten von  $TJ_1$  auf Ebene  $cd$ . Die Strahlen  $bv$  und

VW ergeben nun die weitere Richtung WU der Schattengrenze; UW muß hier wagrecht werden, weil VT ebenfalls wagrecht liegt und VT parallel bc ist. Der auf die Ebene ab fallende Teil des Schattens ist im Aufriß nicht sichtbar; damit ist der Schatten der Platte auf das Prisma erledigt; auf der Wand zeigt sich noch die Strecke HX als Schattengrenze in der Lichtstrahlenrichtung; sie rührt von der durch gs im Grundriß dargestellten Kante der Deckplatte her.

Es bleibt nur noch übrig, den Schatten des Prismas an der Wand zu konstruieren, indem man da bis nach y an der Wand verlängert und von hier aus senkrecht bis Z hochzieht, wo die Wagrechte aus Q getroffen wird.

### Fig. 75. Halber Cylinder mit Deckplatte.

Zieht man an den Grundkreis des Cylinders eine Tangente in der Lichtstrahlenrichtung, welche in a berührt, so bezeichnet die Senkrechte aus a im Aufriß die Grenze des Selbstschattens am Cylinder; sie ist auch schattenwerfend auf die Wand, und man findet ihren Schatten, wenn man den Strahl durch a bis an die Wand nach b verlängert und von hier aus senkrecht hochzieht.

Die Deckplatte wird ihren Schlagschatten zum Teil auf die Wand und zum andern Teil auf die Cylinderfläche werfen. Auf die Wand trifft das Stück aus h f, ferner cd und de; auf die Cylindermantelfläche das Stück aus fg und gc. Die Grenze des Schattens aus h f wird bezeichnet durch den Strahl von  $G^1$  bis zum Cylindermantel; der Schatten aus cd beginnt beim Schnittpunkt des Strahls aus  $C^1$  mit dem Schlagschatten

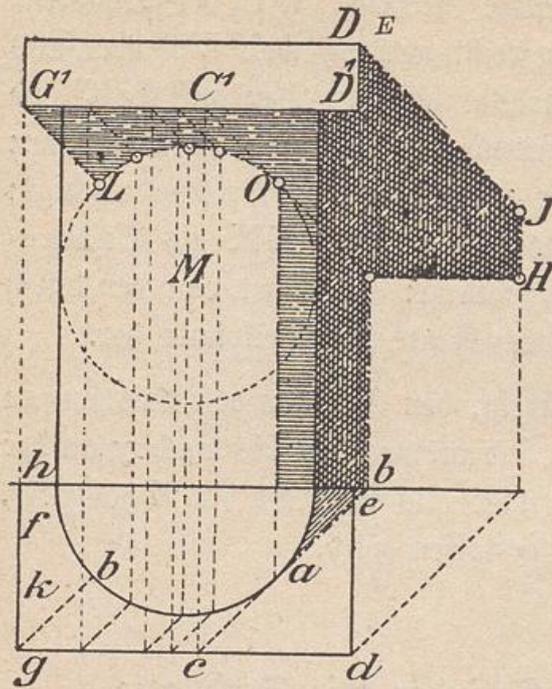


Fig. 75.

des Cylindermantels und geht von hier aus, wie die schattenwerfende Kante  $C^1 D^1$  in wagrechter Richtung bis zum Strahl  $D D^1$ ; die Fortsetzung wird nun senkrecht aus der Kante  $D D^1$  in  $H J$ ; von hier aus wirft die Wagrechte  $D E$  ihren Schatten nach  $E J$ .

Wenn man nun aus  $f$  und  $g$  und etwa noch einem Zwischenpunkt  $k$  im Grundriß die Strahlen nach dem Cylinder-

mantel zieht und von hier aus nach dem zugehörigen Strahl aus  $G^1$  hochlotet, so ist klar, daß der Schatten der Geraden  $f g$  auf die Cylindermantelfläche sich als Gerade in der Vertikalprojektion (Aufriß) zeigt; man kann die Summe der an  $f g$  streifenden Strahlen auffassen als eine Ebene durch  $f g$ , also senkrecht zur Aufriß-Ebene und die Schattengrenze als den Schnitt dieser Ebene mit dem Cylindermantel; dieser Schnitt muß sich, weil senkrecht auf der Aufrißebene in seinem Aufriß als Gerade zeigen.

Anderß ist es mit der Schattengrenze aus  $g c$ . Die Summe der an  $g c$  streifenden Lichtstrahlen kann man wiederum auffassen als eine Ebene; diese Ebene ist zur Aufrißebene unter  $45^\circ$  geneigt und ihre Spur ist parallel dem Grundschnitt; die wahre Schnittfigur einer solchen Ebene mit einem senkrechten Kreis-Cylinder ist eine Ellipse, aber dieselbe zeigt

sich im Aufsriß als ein Kreis mit dem Halbmesser des Grundkreises, und zwar liegt der Mittelpunkt  $M$  in dem Treffpunkt des Strahls aus  $G^1$  mit der Achse des Cylinders. Man braucht also nur aus  $M$  mit  $ML$  einen Kreisbogen zu beschreiben, bis er den Selbstschatten des Cylinders in  $O$  trifft, so ist Bogen  $LO$  der Schatten von  $G^1 C^1$  auf den Cylinder; der Kreis aus  $M$  würde in seiner Fortsetzung die Umriß-Mantellinien berühren. Man kann die Probe für die Richtigkeit des Schattens aus  $G^1 C^1$  leicht dadurch machen, daß man die Schatten einiger Zwischenpunkte aussucht und diese durch eine Kurve verbindet; dieselbe wird sich mit unserem Kreisbogen  $LO$  decken.

Fig. 76. Halber Cylinder mit runder Deckplatte.

Die Selbstschatten der Cylinder werden auch hier wieder gefunden, indem man an die Grundkreise die Tangenten in der Lichtstrahlenrichtung zieht und aus den Berührungspunkten  $a$  und  $b$  die Mantellinien hinaufsetzt. Diese letzteren  $AA_1$  und  $BB_1$  sind Streiflinien und werfen ihren Schatten auf die Wand nach  $GG'$  und  $B'H'$ .

Die Deckplatte wirft ihren Schatten zum Teil wieder auf die Wand, zum andern Teil auf den Cylinder. Die Wand bekommt den Schatten von  $ef$  und  $dbc$ ; der Cylinder von  $ed$ ; die

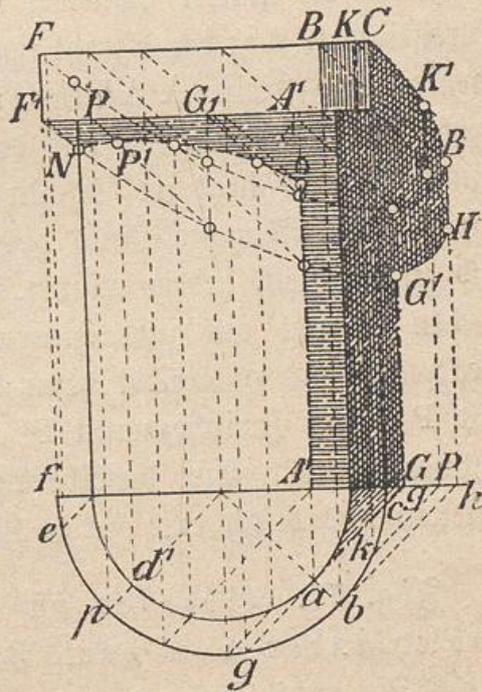


Fig. 76.

Lichtstrahlen streifen wieder an der Oberkante  $BC$ , an der Mantel-Linie  $BB_1$  und an der Unterkante  $B_1D_1F_1$ .

Wie gestaltet sich nun der Schatten aus  $BC$ ?

Jedenfalls ist  $C$  Anfangspunkt, weil schon an der Wand liegend;  $B$  hat seinen Schatten in  $B^1$ ; da aber  $BC$  ein Bogen ist, so muß sein Schatten eine Curve sein und wir werden daher Zwischenpunkte nehmen z. B.  $K$  (im Grundriß  $k$ ); der Strahl aus  $k$  trifft die Wand in  $k^1$ ; senkrecht über  $k^1$  und zwar beim Schnittpunkt mit dem Strahl aus  $K$  liegt  $K'$ , der Schattenpunkt von  $K$ ; ähnlich wie  $K'$  können noch mehrere Zwischenpunkte gefunden und durch eine stetige Curve  $CK'B'$  verbunden werden. Die Fortsetzung der Curve ginge dann wie aus der Figur ersichtlich durch  $F$ ; genau um die Strecke  $BB_1$  senkrecht nach unten verschoben, läge die Schattenkurve der Unterkante  $C_1B_1D_1F_1$ ; diese Schattenkurven sind halbe Ellipsen; die untere schneidet in  $G'$  den Schlagschatten der Streiflinie  $AA^1$ ; der Strahl nach  $G'$  kommt von  $G_1$  (senkrecht über  $g$ ) und streift  $AA^1$  in  $O$ ;  $O$  ist also der Anfangspunkt rechts der Schattenkurve auf dem Cylinder. Der Anfangspunkt  $N$  links liegt im Schnitt der Schattenkurve  $F_1G_1C_1$  mit der Umrißmantel-Linie des Cylinders; Zwischenpunkte sind zu erhalten, indem man z. B. aus dem beliebigen Punkt  $p$  den Strahl bis zum innern Kreis nach  $p'$  zieht; die Senkrechte aus  $p'$  ergibt dann beim Schnitt mit dem Strahl aus  $P$  einen Zwischenpunkt  $P'$  der Schattenkurve auf dem Cylindermantel. Auf dieselbe Art sind mehrere Punkte festzustellen und durch eine stetige Curve freihändig zu verbinden.

Fig. 77. Gegeben ist ein halber wagrechter Hohlcyllinder von dem Profil  $ABCDEF$  nebst zugehörigem Grund- und Aufriß.

Der Hohlcyllinder liegt noch teilweise im Selbstschatten, weil das unterwölbte Stück BCD keine Lichtstrahlen empfängt; erst von D ab fallen die Lichtstrahlen wieder auf die Fläche DEF auf.

Zieht man also aus  $B^1$  den Strahl bis zur Wagrechten aus D zu J, so ist die aus J nach rechts gezogene Mantellinie die Selbstschattengrenze; der Hohlcyllinder sei aber senkrecht zum Grundschnitt abgeschnitten und es wird daher noch zu untersuchen sein, wie von J aus die Schattengrenze nach links verläuft.

Ein Strahl berühre den Bogen BCD in D so ist jedenfalls sicher, daß in das Bogenstück BC kein Licht eindringen kann; denn, wenn man sich durch die Mantellinie  $C_1C_2$  eine Ebene gelegt denkt mit einer Neigung von  $45^\circ$  zur Aufrißebene (Seitenspur H C), so würden alle in dieser Ebene gezogenen Lichtstrahlen, den Cyllindermantel berühren; keiner würde schneiden;  $C^1$  ist also Anfangspunkt des Selbstschattens, weil erst vom Punkt C ab schräge Lichtstrahlen auf die Cyllindermantelfläche eindringen können.

Eine zweite in derselben Richtung durch eine Mantellinie K gedachte Ebene würde nach der Mantellinie  $K_1$  schneiden und diese würde von dem zugehörigen Strahl  $K_2$  in  $K'$  getroffen werden;  $K'$  ist also ein Punkt der Schattengrenze; dieselbe Konstruktion läßt sich noch für weitere be-

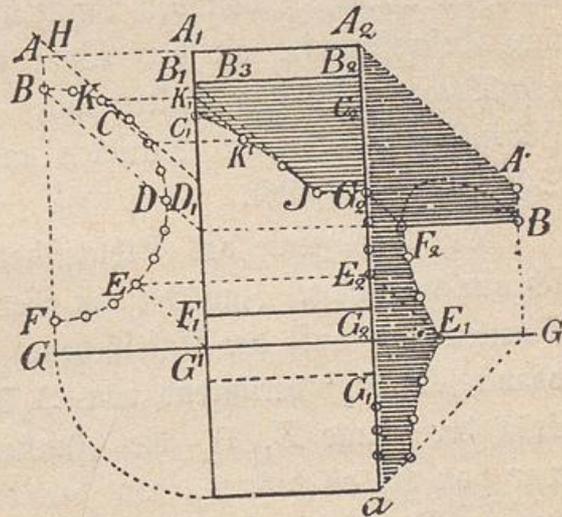


Fig. 77.

liebig angenommene Zwischenpunkte anwenden und man erhält dann die Kurve  $JK'C'$ .

Zur Ermittlung des Schlagschattens an der Wand, welche von der Kante  $A_2 B_2 C_2 D_2 G_2$  geworfen wird, ziehe man im Seitenriß von den Punkten  $ABC$  *z.* die Strahlen; ihre Auftreffpunkte an der Wand bezeichnen die Höhen der zugehörigen Schattenpunkte und die Schnittpunkte dieser Höhenlinien mit den Strahlen aus  $A_2 B_2 C_2$  *z.* sind die Schattenpunkte selbst.

Die Grenzlinie des Schlagschattens an der Wand zeigt sich nun wie folgt. Zunächst von oben ab sieht man  $A_2 A'_2$  als Schatten der auf der Aufrißebene senkrechten Geraden  $ag$ ; sodann  $A'_2 B'_2$  herührend von  $A_2 B_2$ ; jetzt übernimmt ein Stück der Kante  $B_1 B_2$  die Funktion als Streiflinie und zwar von  $B_2$  ab bis  $B_3$ , wo der durch  $J_2$  rückwärts verlängerte Strahl die Kante  $B_1 B_2$  getroffen hat.

Wir haben gesehen, daß der Strahl aus  $B_1$  in  $J$  auf dem Hohlzylinder auftrifft; der Strahl aus  $B_3$  streift den Endpunkt  $J_2$  und trifft auf der Wand in  $J'_2$  auf; alle weiteren rechts von  $B_3$  liegenden Punkte bis  $B_2$  senden ihre Strahlen direkt an die Wand, so daß also thatsächlich  $B_3 B_2$  schattenwerfend ist und die Schattengrenze  $J'_2 B'_2$  erzeugt; diese Gerade überschneidet die Schattenlinie der Außenkante  $B_2 C_2 D_2 E_2$  und da dieser Fall sehr häufig bei Schlagschatten von Gesimsen auf Wandflächen eintritt, so sei hiemit auf diese eigentümliche Erscheinung besonders hingewiesen. In allen Fällen, wo sich Schlagschatten auf der Wand überschneiden ist immer der äußere Umriß als Schattengrenze festzuhalten.

Fig. 78. Ring mit Grundflächen parallel der Aufrißebene.

Der Selbstschatten ist im Aufriß nicht sichtbar; die einzelnen Kreise ergeben auf der Aufrißebene kongruente Figuren als Schlagshatten; es erhellt dies sofort daraus, daß man sich die Kreise einfach in der Lichtstrahlenrichtung bis zur

Aufrißebene zurückgeschoben denken kann; die Lösung unserer Aufgabe besteht also wie aus der Figur ersichtlich einfach darin, daß wir die Mittelpunkte der Kreise auf die Aufrißebene zu-

rücktragen und mit den Halbmessern des Rings Kreise beschreiben und diese durch Tangenten unter  $45^\circ$  verbinden.

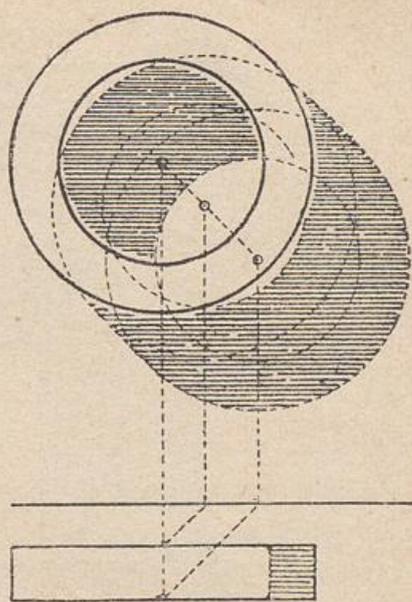


Fig. 78.

### Fig. 79. Wagrechtter Ring.

Denkt man sich zunächst den Ring voll, so ist es ein senkrechter Kreiszylinder und der Selbstschatten wird gefunden, wenn man von den Berührungspunkten  $a$  und  $b$  der Strahlen an dem Grundkreis die Mantellinien  $A_1 A_2$  und  $B_1 B_2$  hochzieht. Die Schatten dieser Linien fallen nach  $A'_1 A'_2$  und  $B'_1 B'_2$ ; die obere Grenzkurve ergibt sich aus dem oberen Halbkreis  $a g c e b$ ; die untere Grenze aus dem untern Halbkreis  $a f d h b$ ; (im Aufriß  $A_2 F_2 B_2$ ). Damit ist der äußere Umriß  $E B'_2 H'_2 D'_2 F'_2 A'_2 A' G' C' E$  des Schlagshattens festgestellt. Er setzt sich zusammen aus zwei Halbellipsen und zwei Senkrechten und zwar berühren die Senkrechten die Ellipsen.

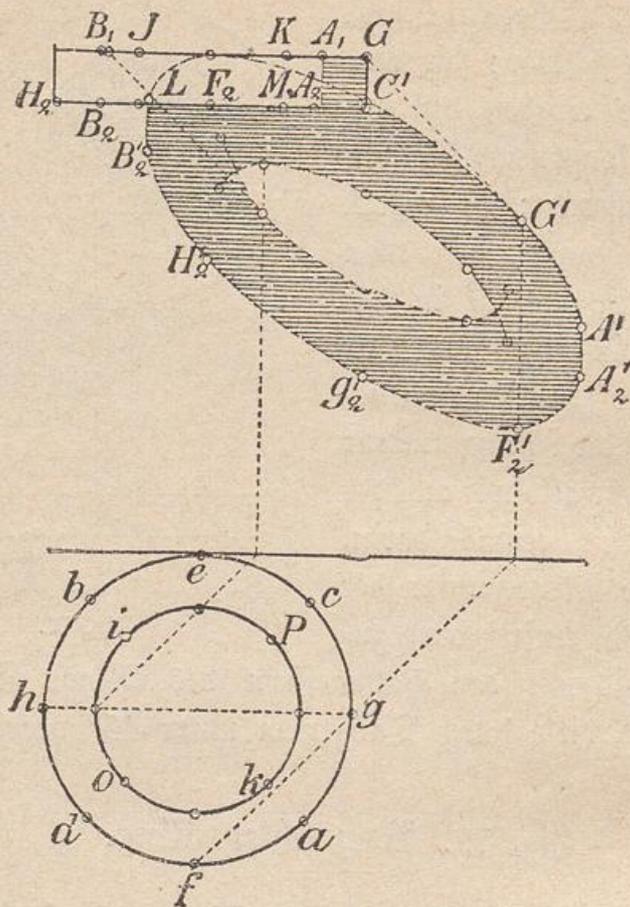


Fig. 79.

Am innern (hohl) Cylinder sind zunächst zwei Selbstschattenkurven  $JL$  und  $KM$  von der Art der Kurve  $C_1 K' J$  in Fig. 77 und es liefert dann der obere Halbkreis  $io k$  den einen Teil der Schlagschattenkurve und der untere Halbkreis  $ip k$  den andern; ihre Schnittpunkte liegen in  $L'$  und  $M'$ .

### Nische.

Fig. 80. Die Nische ist hier ein halber hohler Kreis-cylinder oben in einer Viertelskugel endigend.

Für den Selbstschatten der Nische soweit sie cylinderförmig

ist, können wir ja ohne weiteres die Strahlen von den Punkten  $a$  und  $b$  bis zur Mantelfläche nach  $a^1$ ,  $b^1$  zurückziehen und von hier bis zu den zugehörigen Strahlen im Aufsriß hochloten, womit wir  $A^1$  und  $B^1$  erhalten.

Die Sache hat aber ein Ende, sobald die Aufsrißstrahlen in die Kugelfläche auftreffen; denn jeder weitere Auftreffpunkt liegt jetzt auf einem andern Parallelkreis. Wo z. B. der Strahl aus  $D$  auftrifft ist erst zu untersuchen. Man legt zu diesem Zweck durch  $D$  in der Lichtstrahlenrichtung und senkrecht zur Aufsrißebene eine Hilfsebene, und konstruiert mit Hilfe von Parallelkreisen den Schnitt dieser Ebene mit der Nische. Der Schnitt ergibt die Kurve  $D E F G H$  und der Strahl aus  $D$  liefert nun in  $D^1$  einen Punkt der Schattenkurve. Auf diese Weise kann man beliebig viele weitere Punkte konstruieren.

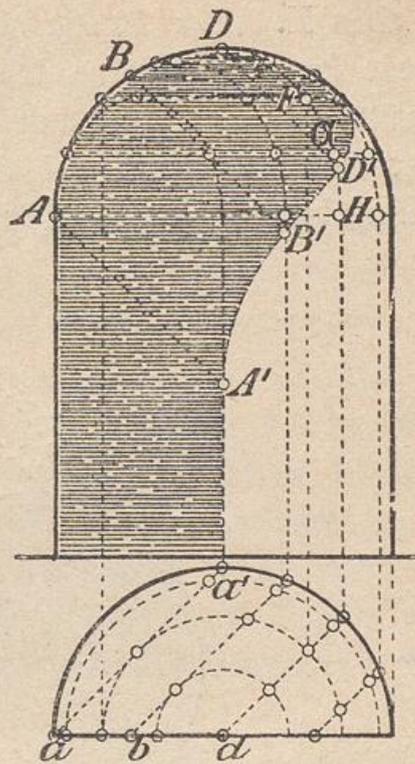


Fig. 80.

### Hohle Halbkugel.

Fig. 81. Dieses Beispiel bietet eine andere und genauere Lösung der letzten Aufgabe. Anfangs- und Endpunkt des Selbstschattens sind jedenfalls die Berührungspunkte  $A$  und  $B$  des Lichtstrahls am Randkreis. Zum Verständnis der Konstruktion von Zwischenpunkten denke man sich eine zur Aufsrißebene senkrechte Hilfsebene in der Richtung des Lichtstrahls  $C d$  und lote auf diese Ebene den Lichtstrahl z. B. des Zwischen-



von  $e$  aus mit  $e e_1$  den Bogen  $e_1 f$  zieht und in  $f$  die Senkrechte errichtet, bis sie die mit  $e f$  Parallele durch  $e_1$  in  $e^3$  schneidet, so ist  $e_3 e f$  der gesuchte Winkel.

Die Konstruktion für einen beliebigen Punkt  $G$  ist also folgende. Auf der verlängerten  $A B$  ziehe durch einen Punkt  $M_2$  eine Gerade in der Richtung der Aufrißprojektion der Lichtstrahlen und von  $G$  parallel  $A B$  die Gerade  $G G_2$ ; beschreibe nun aus  $M_2$  mit  $M_2 G_2$  einen Halbkreis und lege an  $G_2$  den Winkel  $e_3 e f$  an, bis er den Halbkreis in  $G_3$  schneidet; von  $G_3$  ziehe parallel  $A B$  herein nach dem Strahl aus  $G$ , so ist der Treffpunkt  $G_1$  ein Punkt der Schattengrenze.

Hat man einmal einen Punkt  $E_3$  oder  $G_3$  ermittelt, so braucht man nur  $E_3 M_2$  zu ziehen und der Schnitt dieser Geraden mit den verschiedenen Parallelkreisen liefert dann die weiteren Punkte,  $H_3 J_3$  u.

Es ist damit erspart, aus  $H_2 J_2$  die zu  $E_2 E_3$  Parallele zu ziehen. Die Schattengrenze ist eine ebene Kurve von der Spur  $E_3 M_2$ .

Diese Konstruktion liefert ohne Einzeichnen von Schnitten eine genaue Punktreihe für die Schattenkurve.

### Senkrechter Kreisegel.

Fig. 82. Die Lage des Kegels ist so gewählt, daß ein Teil des Schattens in die Aufrißebene, der andere in die Grundebene fällt.

Zur Konstruktion des Schattens in der Grundrißebene denke man sich diese noch über den Grundschnitt hinaus verlängert und den Schatten  $s_2$  der Spitze konstruiert, so bilden die Tangenten an den Grundkreis  $s_2 a$  und  $s_2 b$  die Grenzen des Schlagschattens in der Grundrißebene;  $s_2 a$  schneidet die Auf-

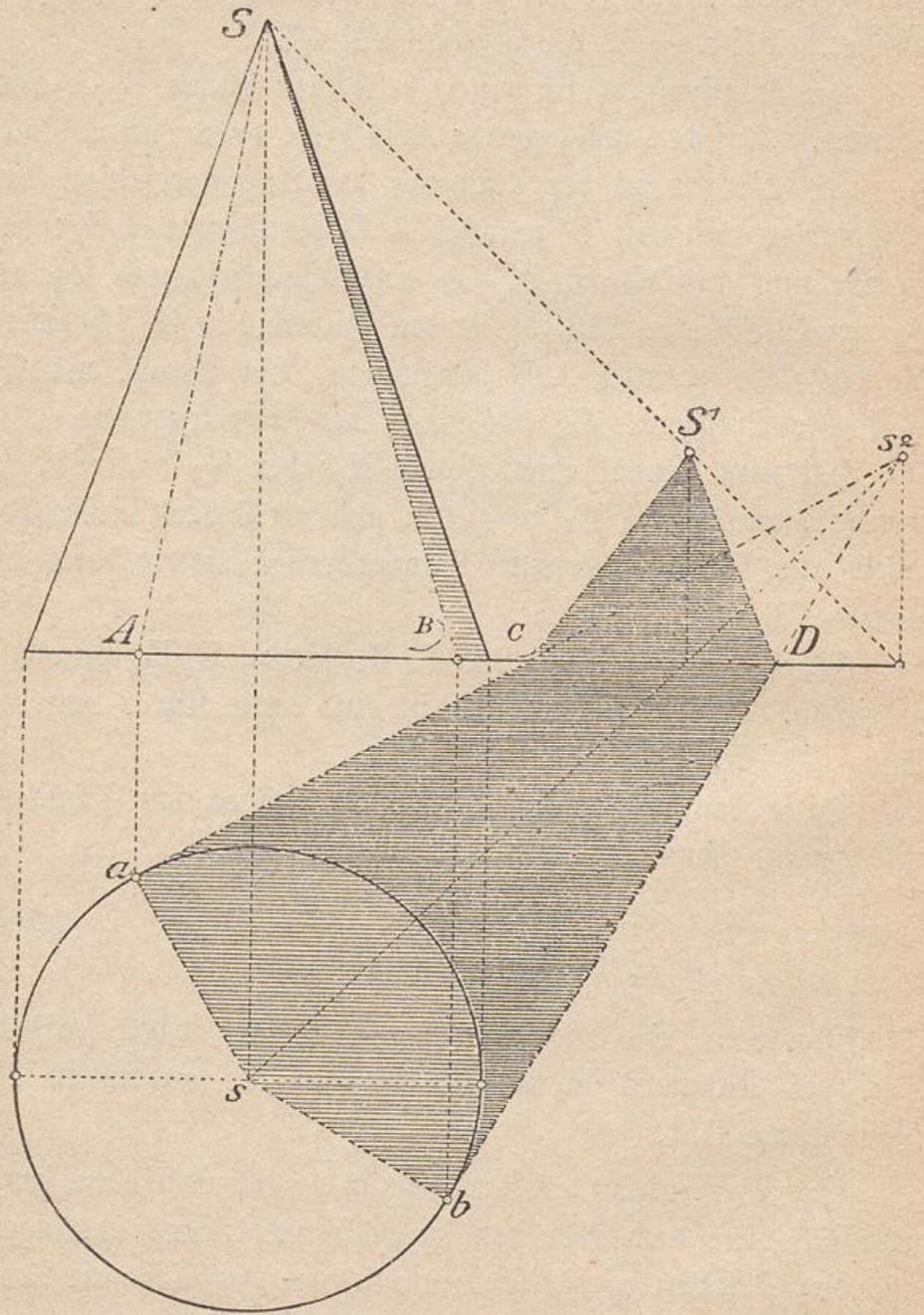


Fig. 82.

rifsebene in C und  $s_2$  b in D; der Schatten geht nun von diesen beiden Punkten aus in der Aufrißebene weiter und zwar nach dem Schattenpunkt  $S'$  der Spitze S des Kegels. Lotet man jetzt noch aus den Punkten a und b bis zur Projektion des Grundkreises im Aufriß nach A und B hoch, so hat man in den Mantellinien SA und SB die Grenzen des Selbstschattens auf dem Kegelmantel.

### Senkrechter Kreisegel auf der Spitze stehend.

Fig. 83. Der Schatten des Grundkreises um G auf die Grundrißebene wird erhalten, wenn man den Schattenpunkt  $m_2$  des Mittelpunkts M sucht und aus  $m_2$  mit dem gleichen Halbmesser des Grundkreises einen Kreis beschreibt; dieser Kreis bildet mit den von m an ihn gezogenen Tangenten ma und mb die Schlagschattengrenze in der Grundrißebene; die Grenzlilien schneiden den Grundschnitt in C und D; von hier aus geht also der Schatten nach der Aufrißebene über. Auf diese wirft der Grundkreis seinen Schatten in der Form einer Ellipse; sie ist durch eine Reihe von auf dem Grundkreis um M beliebig angenommenen Punkten zu konstruieren und geht durch D; die Tangente von C aus an die Ellipse schließt den Umriß des Schattens in der Aufrißebene. Der Selbstschatten ist durch Uebertragung der Berührungspunkte a und b auf den Grundkreis und durch Verbindung dieser Punkte mit der Spitze zu finden.

### Doppelkegel.

Fig. 84. Konstruiert man nach Art der vorhergegangenen Beispiele den Schatten des Doppelkegels in die Grundrißebene, und hierauf in die Aufrißebene, so schneiden sich die

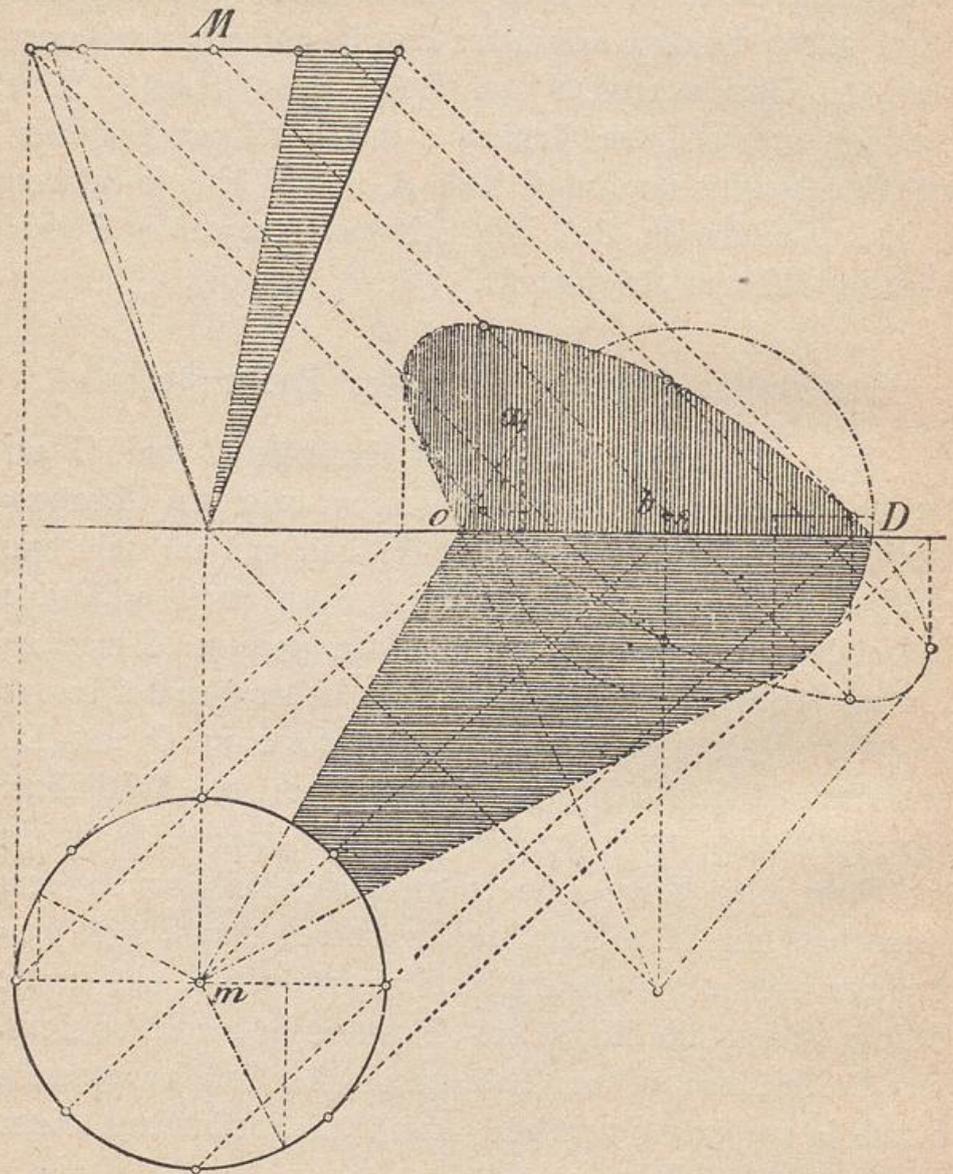


Fig. 83.

Schattengrenzen auf dem Grundschnitt. Das von  $s$  bis zum Grundschnitt in der Grundrißebebene liegende Stück und das von hier aus aufwärts bis zum Schattenpunkt  $S^1$  in der Aufrißebebene liegende Teil bilden den Schlagsschatten

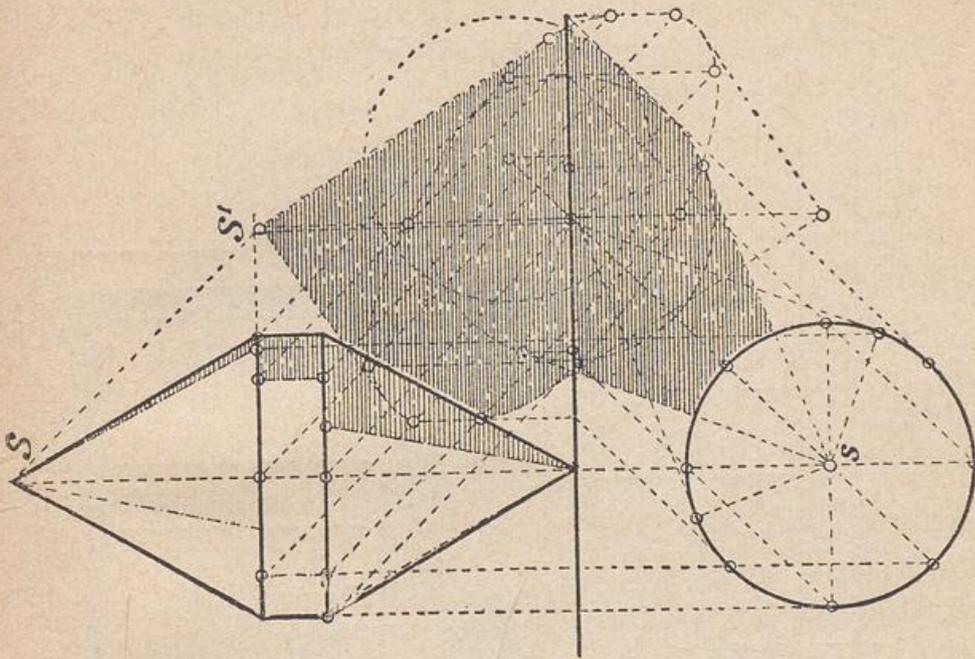


Fig. 84.

des Doppelkegels; der Selbstschatten wird wieder gefunden durch Uebertragung der Berührungspunkte der Tangenten in der Grundrißebene auf die Grundkreise und für das kurze cylindrische Stück durch Herausloten der Mantellinie aus den Berührungspunkten der Lichtstrahlenrichtung an den Grundkreis. Interessant ist bei diesem Beispiel, wie sich der Schatten im Aufriß absetzt.

### Fig. 85. Gruppe von Körpern in schräger Stellung.

Um hiebei bestimmen zu können auf welche Flächen das Licht noch aufstreffen kann, zeichne man sich einen Seitenriß der Gruppe mit der Lichtstrahlenrichtung, und man sieht dann leicht, wo die Streiflinien liegen müssen.

Zur Bestimmung des Lichtstrahls im Seitenriß konstruiert man den Schattenpunkt  $S^1$  der Spitze  $S$  an der Wand; damit

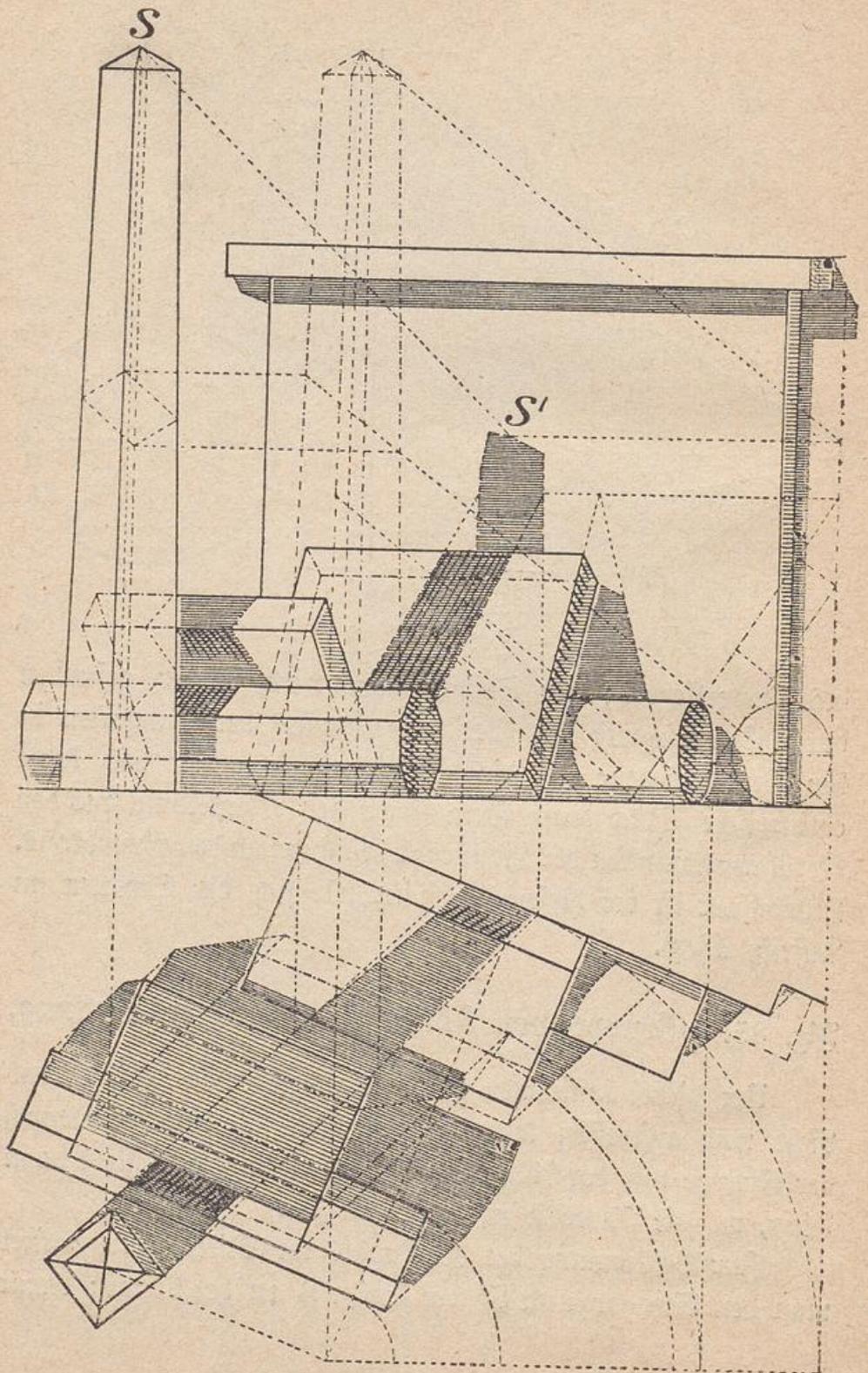


Fig. 85.

ist die Auftreffhöhe an der Wand gegeben und die Verbindungslinie mit der Pyramidenspitze im Seitenriß bezeichnet die Lichtstrahlenrichtung. Von da ab kann die Aufgabe nach Art der bisherigen weitergelöst werden.

### Fig. 86. Kugel.

Denkt man sich an eine Kugel einen Berührungscylinder in der Lichtstrahlenrichtung gelegt, so müßte dieser Cylinder jedenfalls denselben Durchmesser wie die Kugel haben; die Achse des Cylinders ginge durch den Mittelpunkt der Kugel; jede einzelne Mantellinie streifte die Kugel in einem Punkte dessen Halbmesser auf dieser Mantellinie senkrecht stünde (nach dem geometrischen Satz: „Die Tangente eines Kreises steht auf dem Halbmesser ihres Berührungspunktes senkrecht“) alle diese Berührungspunkte zusammen liegen also in einer zu den Mantellinien (Lichtstrahlen) senkrechten Ebene, welche durch den Mittelpunkt der Kugel geht: eine solche Ebene schneidet den Cylinder nach einem Kreis, welcher auf der Kugel Großkreis ist; die Aufgabe ist also zurückgeführt, auf diejenige, den Schnitt einer Ebene mit einem Cylinder zu zeichnen.

Der Gang der Lösung ist nun folgender: Ziehe in der Grundrißebene eine Gerade  $hh$  in der Lichtstrahlenrichtung; dies sei die Spur einer neuen Aufrißebene, auf welche wir nun loten wollen. Wir ziehen zunächst den neuen Umriß der Kugel, dessen Mittelpunkt  $M_2$  im selben Abstand von  $HH$  liegt wie  $M$  vom alten Grundschnitt und ebenfalls senkrecht über  $m$  in Bezug auf den neuen Grundschnitt  $hh$ ; in dieser neuen Aufrißebene zeigt sich der Lichtstrahl in seiner wahren Länge und Neigung zur Grundrißebene; seine Richtung wird gefunden, wenn man aus dem gleichschenkelig rechtwinkligen Dreieck  $CDH$ ,  $HC$  nach  $E$  herunterklappt und in  $E$  eine

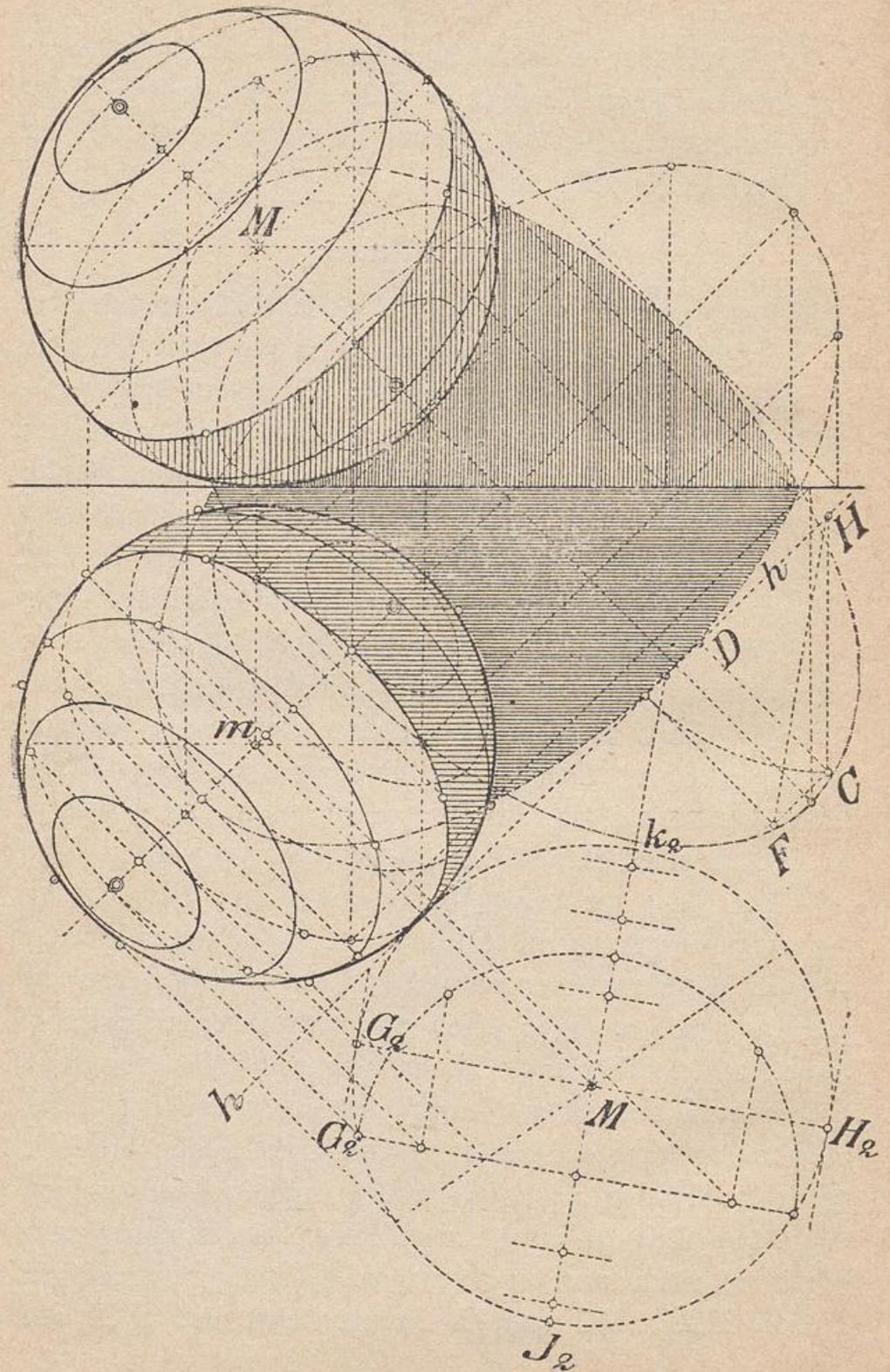


Fig. 86.

Senkrechte errichtet, bis sie die aus C mit HD Parallele in F trifft; FH bezeichnet die neue Lichtstrahlenrichtung; zieht man an den neuen Kugelumriß die so gerichteten Tangenten, die in  $G_2$  und  $H_2$  berühren, so sind dies die Umriß-Mantellinien des Berührungscylinders;  $G_2H_2$  ist die Projektion der Berührungskreislinie oder der durch  $M_2$  zu den Mantellinien senkrechte Cylinderschnitt; wird nun dieser Schnitt nach der Grundrißebene gelotet und von da nach der alten Aufrißebene übertragen, so ist damit die Grenze des Selbstschattens der Kugel gefunden. Den Schlagschatten bestimmt man wieder aus der Streiflinie in bekannter Weise durch Annahme verschiedener Zwischenpunkte.

Die Halbkugel  $G_2 K_2 H_2$  liegt also im Schatten; die andere  $G_2 I_2 H_2$  im Licht; wo der Strahl senkrecht auftrifft, also bei I, ist hellstes Licht und wenn man bis  $G_2$  in eine Anzahl Zonen einteilt so können damit Lichtstreifen bezeichnet werden.

Ähnliches gilt für die Schattenpartie in Bezug auf Abstufung durch zurückgeworfenes Licht; an  $G_2 H_2$  direkt anschließend ist es am dunkelsten, weiter abwärts jedoch hellt sich der Schatten immer mehr auf, so daß er sich unten vom Schlagschatten wirksam abhebt.

Wie schon eingangs bemerkt, enthält diese sogenannte Normalkugel alle möglichen Stufen des Lichtes und des Selbstschattens und es kommt also zur Bestimmung der Abstufung einer beliebigen Fläche nur darauf an, sie mit der gleichgerichteten Stelle dieser Normalkugel in Einklang zu bringen.

### Drehungs-Ellipsoid.

Fig. 89. Im Aufriß berührt der Strahl in C und D, symmetrisch dazu liegen E und F; im Grundriß hat man auf

dieselbe Art a, b, e und f erhalten; den Punkten a und b entsprechen im Aufriß A und B, den Punkten C und D im Grundriß c und d.

Um weitere Hilfspunkte zu erhalten, kann man die Konstruktion mit Berührungsegeln benützen. Denkt man sich von irgend einem Punkt J der verlängerten Achse des Ellipsoids an dieses einen Berührungsegel gelegt, der nach dem Parallelkreis G H berührt, so ist jedenfalls auf diesem Parallelkreis auch ein Punkt der Selbstschattencurve (wenn der Parallelkreis nicht über dem höchsten Punkt der Streiflinie liegt) und zwar wird dies der Anfangspunkt der Mantellinie sein, die für den Kegel den Selbstschatten abgrenzt. Sucht man sich daher nach dem Verfahren in Fig. 83 diesen Punkt, so ist dieser ein Punkt der Streiflinie. Auf diese Art können beliebig viele Punkte gesucht werden. Zunächst interessant ist der höchste und der tiefste Punkt; sie liegen beide in der Symmetrieebene U V. Man hat hier die Tangente in der Richtung des um  $45^\circ$  gedrehten Lichtstrahls an den Kegel zu legen, dadurch die Höhenlage des Parallelkreises zu bestimmen, auf dem der höchste Punkt liegen muß und schließlich diesen Punkt durch einen Strahl unter  $45^\circ$  aus der Spitze des Kegels auf dem Parallelkreis abzuschneiden.

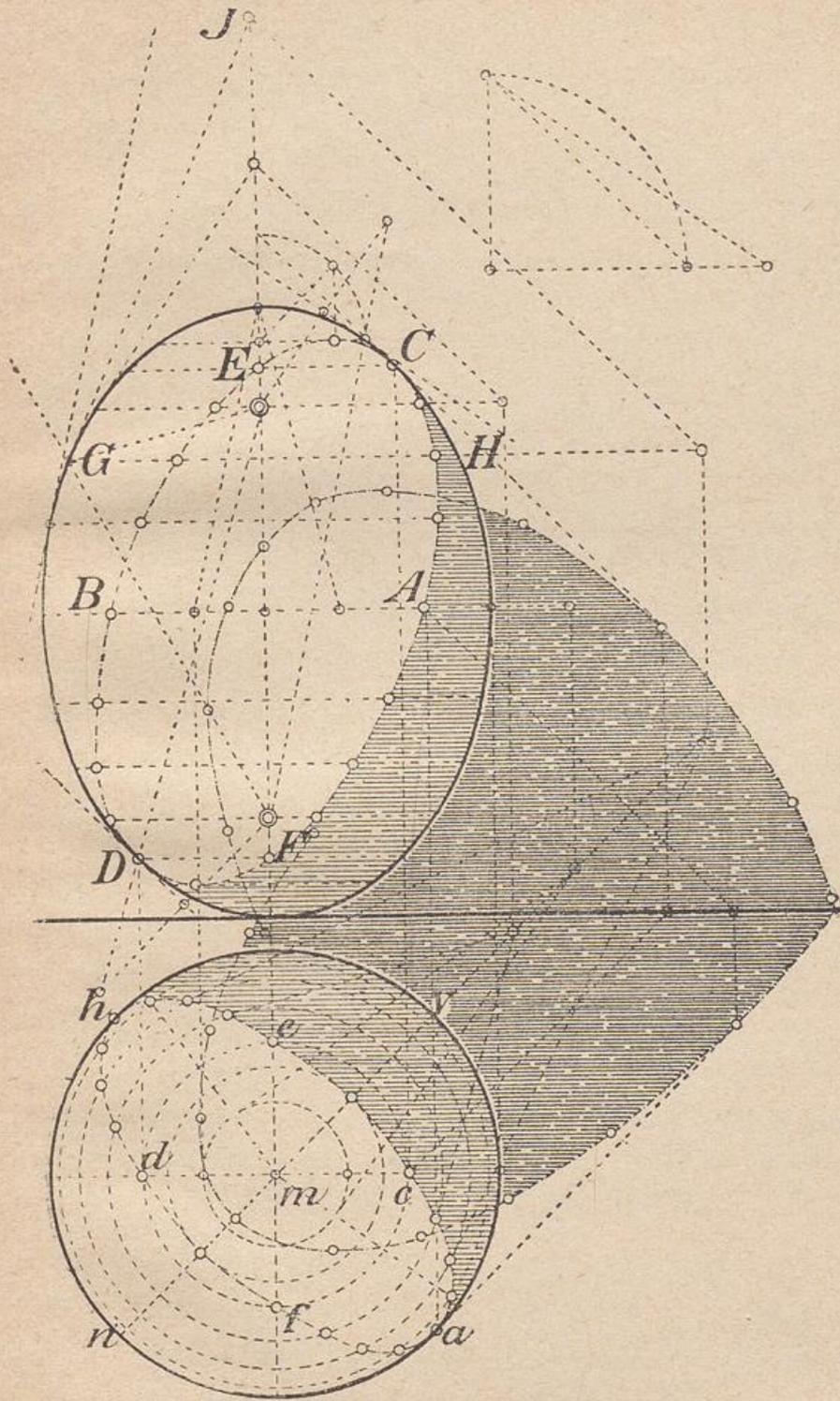
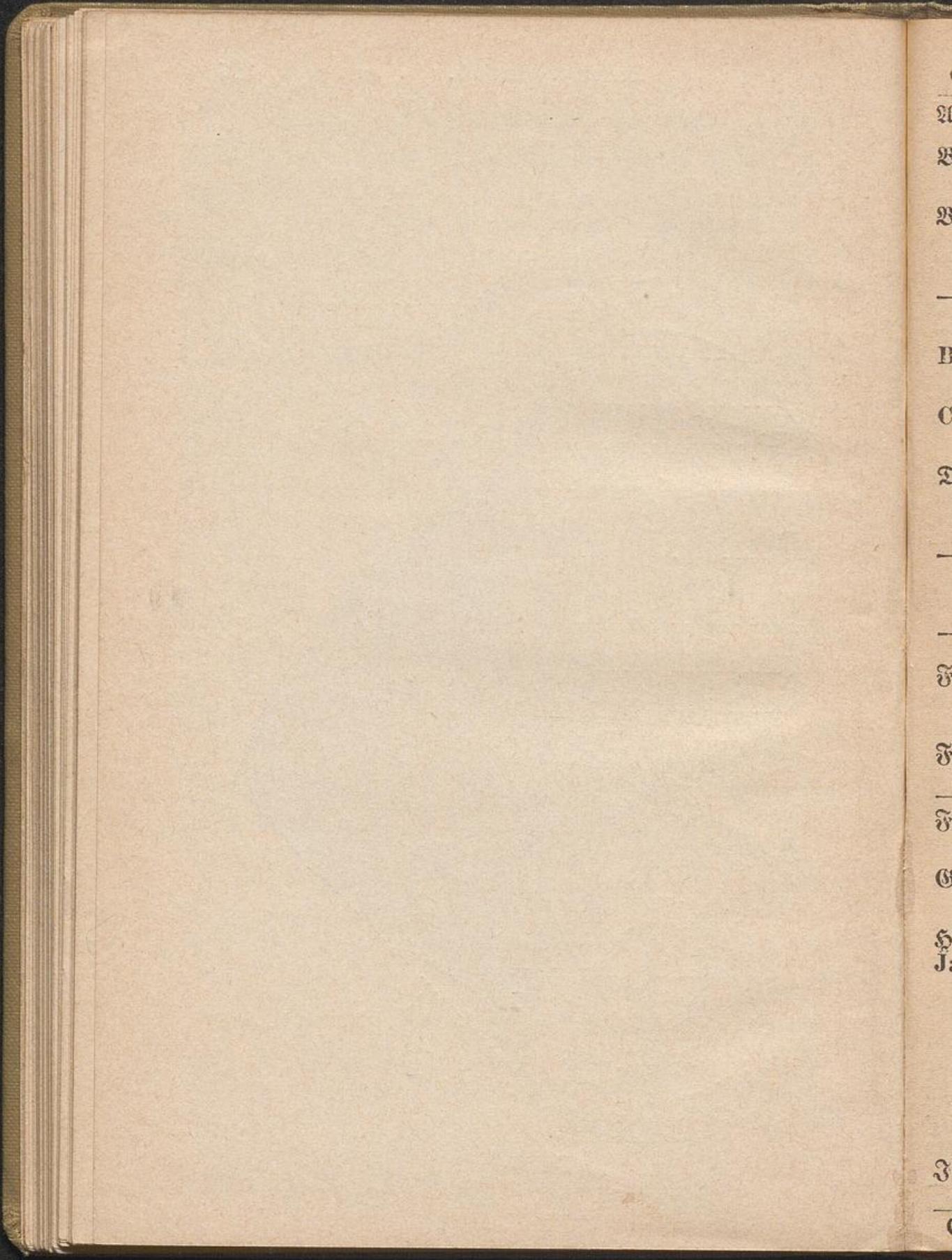


Fig. 87.



—  
21  
22  
23  
—  
B  
C  
E  
—  
—  
E  
E  
—  
E  
G  
H  
I  
—  
3  
—  
C