



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung**

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik

**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig, 1898**

256) Übergang zu geschlossenen Stromkreisen

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77934](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77934)

einer der Streifen gezeichnet ist. Jeder Einzelstrom absorbiert im Beispiele die Strömung seines Streifens vollkommen.

In Fig. 135 handelt es sich um drei gleich starke Drahtströme, von denen der mittlere entgegengesetzte Richtung hat, wie die beiden anderen.

An Fig. 136 erkennt man, wie ein homogenes Feld durch zwei dicht nebeneinander liegende Parallelströme von entgegengesetzter Richtung gestört wird. Zwei Deutungen sind möglich, je nachdem man die Strömung des Feldes als horizontal oder als vertikal betrachtet, wobei die Verbindungslinie der Drähte entgegengesetzt zu drehen ist und in die Strömungsachse fallen muß.

Fig. 137 stellt dasselbe dar, jedoch steht die Verbindungslinie der Drähte um  $90^\circ$  geneigt gegen die Stromrichtung.

In Fig. 140 handelt es sich um die Strömung in einem elektrischen Bande und die elektromagnetische Polarisation der Umgebung.

Auch Fig. 141 läßt eine entsprechende Deutung für Bandströmungen zu.

Bei den Punktproblemen kann man auch die bandförmigen Strömungen untersuchen, die den Vertauschungsproblemen entsprechen.

Die genannten Beispiele, die ins Endlose vermehrt werden können, werden von der Art und Weise der elektromagnetischen Polarisation in der Umgebung von Strömen ein hinreichendes Bild geben. In der „Theorie der isogonalen Verwandtschaften“ findet der vorgeschrittene Leser auch die wichtigsten der mit den elliptischen Funktionen zusammenhängenden Fälle.

256) Übergang zu geschlossenen Stromkreisen.  $AB$  und  $CD$  seien gleichgerichtete Ströme von derselben Intensität  $J$ . Nach Nr. 251 können sie durch das von ihnen umgrenzte magnetische Doppelblatt von Stärke  $\Phi = \frac{1}{2} \kappa J$  ersetzt werden. Bringt man nun

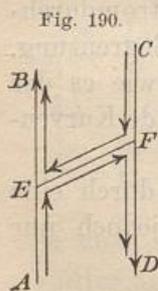
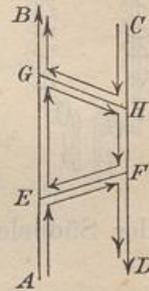


Fig. 190.

eine verbindende Doppelgerade  $EF$  dazu, welche entgegengesetzte Ströme von derselben Intensität leitet, so heben sich die Wirkungen dieser Hilfsströme für jeden Raumpunkt auf, und auch das Gesamtpotential  $V$  für jeden Punkt des Raumes bleibt ungeändert. Die den Strömen  $EF$  und  $FE$  entsprechenden magnetischen Doppelblätter erhalten die Dichtigkeit  $\delta + (-\delta) = 0$ , sind also als nicht vorhanden zu betrachten. Folglich: Die beiden Ströme  $A E F D$  und  $C F E B$  wirken wie die ursprünglichen Ströme  $AB$  und  $CD$  und wie das zugehörige Doppelblatt. Wird nun das eine Doppelblatt von  $P$  aus unter dem körperlichen Winkel  $\varphi_1$  gesehen, das andere unter  $\varphi_2$ , so

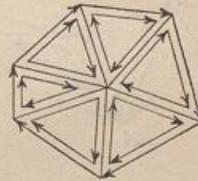
zerlegt sich das Anfangspotential  $V$  in zwei Teile  $V_1 = V \frac{\varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_2}$  und  $V_2 = V \frac{\varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2}$ , die sich also wie die zugehörigen körperlichen Winkel verhalten. Da nun, wie auch die Gerade  $EF$  gelegt werde, die Potentialsumme für die beiden Ströme gleich der der beiden Doppelschalen ist, so bleibt nur der Schluß übrig, daß auch die Einzelpotentiale übereinstimmen, so daß z. B. das Potential des Stromes  $A E F D$  für jeden Punkt des Raumes gleich dem der entsprechenden Doppelschale ist. Folglich ist das Potential des Stromes  $A E F D$  ebenso wie das der Doppelschale proportional dem körperlichen Winkel, unter dem der Strom gesehen wird.

Fig. 191.



Führt man noch einen zweiten Schnitt  $GH$  in der Weise, daß ein geschlossener Strom  $EGHF$  von Vierecksgestalt entsteht, so kann man dessen Wirkung gleich der Differenz der Wirkung der Blätter  $AGHD$  und  $A E F D$  setzen. Die betreffenden Schlüsse bleiben bestehen. Fallen  $H$  und  $F$  zusammen, so ist auch das Dreieck erledigt.

Fig. 192.



Ein Blick auf Fig. 192 zeigt, daß jedes stromumflossene Polygon in Dreiecke zerlegt werden kann. Folglich gilt zunächst von ebenen Flächen, die von einem Strom umflossen werden, der Satz:

Die Wirkung eines Stromkreises kann ersetzt werden durch die eines magnetischen Doppelblattes von der Stärke  $\Phi = \frac{1}{2} \kappa J$ , welches vom Stromkreise umgrenzt ist. Das Potential des Stromes wie die des Blattes für jeden Raumpunkt  $P$  ist gleich  $\Phi \varphi$  oder  $\frac{1}{2} \kappa J \varphi$ , wo  $\varphi$  den körperlichen Winkel bedeutet, unter dem die Stromkreisfläche von  $P$  aus gesehen wird.

Liegt  $P$  in der Ebene des Stromkreises, d. h. im Blatte selbst, so erscheint dieses unter dem körperlichen Winkel  $\varphi = \frac{4 \cdot 1^2 \cdot \pi}{2} = \pm 2\pi$ . Das Potential ist also für jeden Punkt der umspannten Fläche gleich  $\frac{1}{2} \kappa J 2\pi = \pm \kappa \pi J$ . Die Gleichung  $\frac{\kappa}{2} J \varphi = c$  giebt die Gleichung der Niveauflächen, zu denen auch die Ebene selbst gehört. Daß das Potential in der Ebene selbst zweideutig genannt ist, reicht nicht aus, es ist sogar unendlichdeutig. Angenommen, es habe den Wert  $\kappa \pi J$ ; macht man dann um einen der Drähte einen Umgang im Sinne des wachsenden Potentials, so geht man über zu  $\kappa \pi J + 2\pi \kappa J$ , während, der entgegengesetzte Gang auf  $\kappa \pi J - 2\pi \kappa J = -\kappa \pi J$  führt. Das Potential hat also dort den Wert  $\kappa \pi J \pm 2n \kappa J$ , wo  $n$  eine beliebige

ganze Zahl ist. Dies gilt nun von jedem Raumpunkte. Diese Periodizität bzw. Vieldeutigkeit hat ihren Grund in der des Winkels

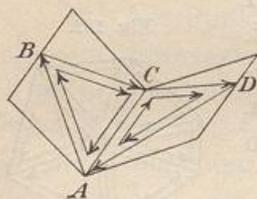
Fig. 193.



$\vartheta + 2n\pi$  für einen Draht, kann also nicht überraschen. Von diesem Zusatz  $2n\pi$  soll künftig abgesehen werden. Für die Fortsetzung der Blattebene ist aus Symmetriegründen das Potential gleich Null. Diese reicht bis ins Unendliche, wo aber ebenfalls der Potentialwert gleich Null ist. Der Ausdruck  $\kappa\pi J$  bedeutet also die Arbeit, die nötig ist, die nordmagnetische Einheit aus dem unendlichen Bereich bis in die Ebene des eigentlichen Blattes zu führen. Dies Arbeit ist positiv auf der Seite der Nordbelegung, negativ auf der Seite der Südbelegung des Blattes.

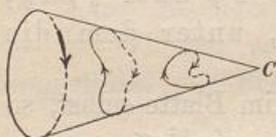
257) Nichtebene Stromkreise. Ist das Stromviereck ein windschiefes, so läßt sich ebenfalls die Zerlegung in zwei Dreiecke durchführen, die aber nicht mehr in dieselbe Ebene fallen.

Fig. 194.



Der Potentialsatz gilt für jedes einzelne Dreieck, also auch für die Summe beider Blätter, denn auch die körperlichen Winkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  werden algebraisch addiert. Ganz ebenso ist es, wenn das Polygon von sehr vielen Seiten auf einer beliebigen krummen Fläche liegt, die nun als Blatt behandelt werden kann. Stets ist das Potential des Stromes gleich  $\frac{1}{2} \kappa J \varphi$ , wo  $\varphi$  der körperliche Winkel ist, unter dem das Blatt erscheint.

Fig. 195.



Die Flächen  $V=0$  bzw.  $V=\kappa\pi J$  brauchen nun nicht mehr mit der Blattfläche und ihrer Erweiterung zusammenzufallen, auch sind sie keine Ebenen mehr. Sie gehören der Gruppe  $V=c$  an. Ohne weiteres ist klar, daß sämtliche geschlossene Ströme, die einen allgemeinen Kegel mit Spitze  $C$  bei beliebiger Gestalt in seiner Fläche umkreisen, in Bezug auf die Spitze dasselbe Potential  $\frac{1}{2} \kappa J \varphi$  haben, sobald die Intensität  $J$  für alle dieselbe ist.

258) **Aufgabe.** Das Potential und die hereinziehende Kraft eines Kreisstroms von der Intensität  $J$  für einen beliebigen Punkt  $c$  seiner Normalachse zu berechnen.

**Auflösung.** a) Man denke sich das magnetische Doppelblatt in Gestalt der durch den Kreis gelegten Kalotte, deren Mittelpunkt  $C$  ist. Nach Nr. 44 wird diese, wenn Winkel  $ACM = \gamma$  ist, von  $C$  aus