Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

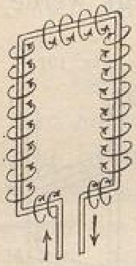
Leipzig, 1898

258) Das Potential und die anziehende Kraft eines Kreisstromes

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

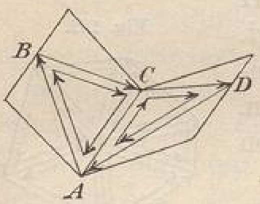
ganze Zahl ist. Dies gilt nun von jedem Raumpunkte. Diese Periodizität bezw. Vieldeutigkeit hat ihren Grund in der des Winkels $\vartheta + 2n\pi$ für einen Draht, kann also nicht überraschen. Von diesem Zusatz $2n\pi$ soll künftig abgesehen werden. Für die Fortsetzung der Blattebene ist aus Symmetriegründen das Potential gleich Null. Diese reicht bis ins Unendliche, wo aber ebenfalls der Potentialwert gleich Null ist. Der Ausdruck $\varkappa\pi J$ bedeutet also die Arbeit, die nötig ist, die nordmagnetische Einheit aus dem unendlichen Bereich bis in die Ebene des eigentlichen Blattes zu führen. Dies Arbeit ist positiv auf der Seite der Nordbelegung, negativ auf der Seite der Südbelegung des Blattes.

Fig. 193.



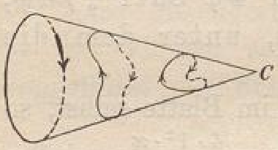
257) Nichtebene Stromkreise. Ist das Stromviereck ein windschiefes, so läfst sich ebenfalls die Zerlegung in zwei Dreiecke durchführen, die aber nicht mehr in dieselbe Ebene fallen. Der Potentialsatz gilt für jedes einzelne Dreieck, also auch für die Summe beider Blätter, denn auch die körperlichen Winkel φ_1 und φ_2 werden algebraisch addiert. Ganz ebenso ist es, wenn das Polygon von sehr vielen Seiten auf einer beliebigen krummen Fläche liegt, die nun als Blatt behandelt werden kann. Stets ist das Potential des Stromes gleich $\frac{1}{2}\varkappa J\varphi$, wo φ der körperliche Winkel ist, unter dem das Blatt erscheint.

Fig. 194.



Die Flächen $V = 0$ bezw. $V = \varkappa\pi J$ brauchen nun nicht mehr mit der Blattfläche und ihrer Erweiterung zusammenzufallen, auch sind sie keine Ebenen mehr. Sie gehören der Gruppe $V = c$ an. Ohne weiteres ist klar, dafs sämtliche geschlossene Ströme, die einen allgemeinen Kegel mit Spitze C bei beliebiger Gestalt in seiner Fläche umkreisen, in Bezug auf die Spitze dasselbe Potential $\frac{1}{2}\varkappa F\varphi$ haben, sobald die Intensität J für alle dieselbe ist.

Fig. 195.



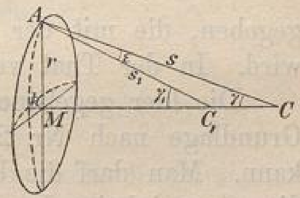
258) **Aufgabe.** Das Potential und die hereinziehende Kraft eines Kreisstroms von der Intensität J für einen beliebigen Punkt c seiner Normalachse zu berechnen.

Auflösung. a) Man denke sich das magnetische Doppelblatt in Gestalt der durch den Kreis gelegten Kalotte, deren Mittelpunkt C ist. Nach Nr. 44 wird diese, wenn Winkel $ACM = \gamma$ ist, von C aus unter dem körperlichen Winkel $\varphi = 4 \cdot 1^2 \pi \frac{\text{Kalotte}}{\text{Kugelfläche}} = 4\pi \frac{2 s \pi h}{4 s^2 \pi}$ $= \frac{2\pi h}{s}$ gesehen, wo h die Pfeilhöhe der Kalotte, also $h = s - s \cos\gamma$ ist. Daraus folgt $\varphi = 2\pi(1 - \cos\gamma)$. Das Potential im Punkte C ist also

$$V = \tfrac{1}{2} \varkappa J 2\pi (1 - \cos\gamma) = \pi\varkappa J (1 - \cos\gamma).$$

b) Um die ablenkende Kraft für die Poleinheit in C zu berechnen, die senkrecht gegen die Ebene ACM wirkt (wie auch der Versuch zeigt), benutze man die Gefälleformel

Fig. 196.



$$p = \frac{V - V_1}{w},$$

wo w ein kleiner Weg CC_1 ist. Man erhält

$$p = \pi\varkappa J \frac{(1 - \cos\gamma) - (1 - \cos\gamma_1)}{CC_1} = \pi\varkappa J \frac{\cos\gamma_1 - \cos\gamma}{CC_1}.$$

Hier ist

$$\cos\gamma_1 - \cos\gamma = -2 \sin\frac{\gamma_1 + \gamma}{2} \sin\frac{\gamma_1 - \gamma}{2}$$

$$= -2 \sin\left(\gamma + \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin\frac{\varepsilon}{2} = -2\left[\sin\gamma \cos\frac{\varepsilon}{2} + \cos\gamma \sin\frac{\varepsilon}{2}\right] \sin\frac{\varepsilon}{2}$$

$$= -2\left[\sin\gamma \cos\frac{\varepsilon}{2} \sin\frac{\varepsilon}{2} + \cos\gamma \sin^2\frac{\varepsilon}{2}\right].$$

Hier kann $\sin^2\frac{\varepsilon}{2}$ als unendlich klein zweiter Ordnung gleich Null gesetzt werden. Es bleibt stehen $-2\sin\gamma \cdot \frac{1}{2} \sin\varepsilon = -\sin\gamma \cdot \sin\varepsilon$. Nun ist nach dem Sinus-Satze $\sin\varepsilon = \frac{CC_1}{s_1} \cdot \sin\gamma = \frac{CC_1}{s_1} \cdot \frac{r}{s}$, also ist $\sin\gamma \cdot \sin\varepsilon = \frac{r}{s} \cdot \frac{CC_1}{s_1} \cdot \frac{r}{s} = \frac{r^2 CC_1}{s^2 \cdot s_1}$, also abgesehen vom Vorzeichen

$$p = \pi\varkappa J \cdot \frac{r^2 CC_1}{s^2 \cdot s_1} \cdot \frac{1}{CC_1} = \frac{r^2 \pi\varkappa J}{s^2 s_1}.$$

Für unendlich kleines CC_1 ist $s_1 = s$ zu setzen, die ablenkende Kraft wird also

$$p = \frac{r^2 \pi\varkappa J}{s^3} = \frac{F \cdot \varkappa J}{s^3},$$

die Kraft für Punkte der Achse ist also proportional der Kreisfläche des Stroms und umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung von den Stromteilchen. (Dieses Resultat hat noch allgemeinere Geltung und ist von Wichtigkeit geworden für die Theorie der hydrodynamischen Wirbelringe.)

Für den Punkt M folgt $p = \frac{r^2 \pi \varkappa J}{r^3} = \frac{\pi \varkappa J}{r}$ als anziehende Kraft, während das Potential dort gleich $\varkappa \pi J$ war.

Laplace hat aus den Beobachtungen von Biot und Savart, also auf rein experimenteller Grundlage, das sogenannte Biot-Savartsche Gesetz abgeleitet und ihm die Form

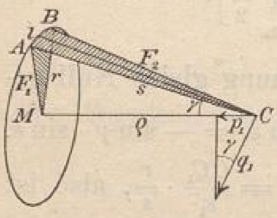
$$p = \frac{2 F \varkappa_1 J}{s^3} = \frac{2 r^2 \pi \varkappa_1 J}{s^3}$$

gegeben, die mit der obigen übereinstimmt, sobald $2\varkappa_1 = \varkappa$ gesetzt wird. In der That verhalten sich die beiden Konstanten wie $1:2$.

Die hier gegebene Entwickelung ist eine rein theoretische, deren Grundlage nach Nr. 240 sehr leicht experimentell geprüft werden kann. Man darf die Übereinstimmung als einen schönen Beweis für die Genauigkeit der französischen Forschungen ansehen. Selbstverständlich kann man auch von der Biot-Savartschen Formel ausgehen und das in Nr. 248 entwickelte Grundgesetz aus ihr ableiten. Dies soll nur in einer Anmerkung geschehen.

259) Erläuterungen zum Biot-Savartschen Gesetz. a) Der ganze Kreisstrom giebt die auf den Einheitspol wirkende Kraft

Fig. 197.



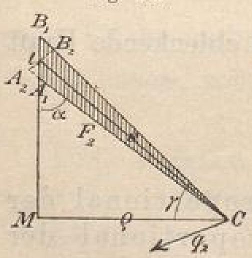
1) $$p = \frac{2 r^2 \pi \varkappa_1 J}{s^3}.$$

Ist l der n^{te} Teil des Stromweges, so ist der Anteil

$$p = \frac{1}{n} \cdot \frac{2 r^2 \pi \varkappa_1 J}{s^3} = \frac{2 F_1 \varkappa_1 J}{s^3},$$

wo F_1 der zu l gehörige Sektor ist. Die von l ausgehende Kraft q_1 liegt aber in der Vertikalebene, nämlich senkrecht zur Fläche ABC, p_1 ist nur die Projektion von q_1 auf CM, also ist $q_1 = \frac{2 F_1 \varkappa_1 J}{s^3} \cdot \frac{1}{\sin\gamma}$, oder da in Fig. 197 $F_2 = \frac{F_1}{\sin\gamma}$ ist, $q_1 = \frac{2 \varkappa_1 J F_2}{s^3}$.

Fig. 198.



Für C und für die Gröfse von q_1 ist es gleichgültig, was für einem Kreise l angehört, wenn nur s und F_2 dieselben Werte behalten. Man kann z. B. die Fläche ABC aufrichten, indem man l senkrecht macht; das einzige, was sich ändert, ist, dafs dann q_1 in die Horizontalebene fällt. Fig. 198 stellt die neue Zeichnung dar. Dafs $A_1 B_1$ nicht in der eigentlichen Lage $A_2 B_2$ gezeichnet ist, bleibt, da l unendlich klein