Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

259) Erläuterungen zum Biot-Savartschen Gesetze

Für den Punkt M folgt $p = \frac{r^2 \pi \varkappa J}{r^3} = \frac{\pi \varkappa J}{r}$ als anziehende Kraft, während das Potential dort gleich $\varkappa \pi J$ war.

Laplace hat aus den Beobachtungen von Biot und Savart, also auf rein experimenteller Grundlage, das sogenannte Biot-Savartsche Gesetz abgeleitet und ihm die Form

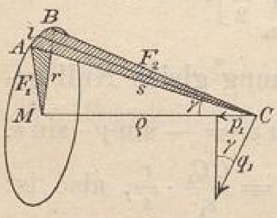
$$p = \frac{2 F \varkappa_1 J}{s^3} = \frac{2 r^2 \pi \varkappa_1 J}{s^3}$$

gegeben, die mit der obigen übereinstimmt, sobald $2 \varkappa_1 = \varkappa$ gesetzt wird. In der That verhalten sich die beiden Konstanten wie 1 : 2.

Die hier gegebene Entwickelung ist eine rein theoretische, deren Grundlage nach Nr. 240 sehr leicht experimentell geprüft werden kann. Man darf die Übereinstimmung als einen schönen Beweis für die Genauigkeit der französischen Forschungen ansehen. Selbstverständlich kann man auch von der Biot-Savartschen Formel ausgehen und das in Nr. 248 entwickelte Grundgesetz aus ihr ableiten. Dies soll nur in einer Anmerkung geschehen.

259) Erläuterungen zum Biot-Savartschen Gesetz. a) Der ganze Kreisstrom giebt die auf den Einheitspol wirkende Kraft

Fig. 197.



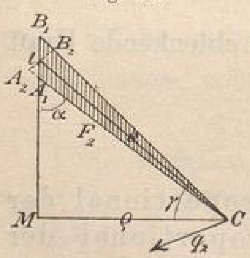
1) $$p = \frac{2 r^2 \pi \varkappa_1 J}{s^3}.$$

Ist l der n^{te} Teil des Stromweges, so ist der Anteil

$$p = \frac{1}{n} \cdot \frac{2 r^2 \pi \varkappa_1 J}{s^3} = \frac{2 F_1 \varkappa_1 J}{s^3},$$

wo F_1 der zu l gehörige Sektor ist. Die von l ausgehende Kraft q_1 liegt aber in der Vertikalebene, nämlich senkrecht zur Fläche ABC, p_1 ist nur die Projektion von q_1 auf CM, also ist $q_1 = \frac{2 F_1 \varkappa_1 J}{s^3} \cdot \frac{1}{\sin \gamma}$, oder da in Fig. 197 $F_2 = \frac{F_1}{\sin \gamma}$ ist, $q_1 = \frac{2 \varkappa_1 J F_2}{s^3}$.

Fig. 198.



Für C und für die Gröfse von q_1 ist es gleichgültig, was für einem Kreise l angehört, wenn nur s und F_2 dieselben Werte behalten. Man kann z. B. die Fläche ABC aufrichten, indem man l senkrecht macht; das einzige, was sich ändert, ist, dafs dann q_1 in die Horizontalebene fällt. Fig. 198 stellt die neue Zeichnung dar. Dafs $A_1 B_1$ nicht in der eigentlichen Lage $A_2 B_2$ gezeichnet ist, bleibt, da l unendlich klein ist, ohne Einflufs, denn der Flächeninhalt F_2 ist unverändert geblieben. Also ist wiederum

$$q_2 = \frac{2\varkappa_1 J F_2}{s^3} = \frac{2\varkappa_1 J}{s^3} \cdot \frac{l\varrho}{2} = \frac{\varkappa_1 J l \varrho}{s^3} = \frac{\varkappa_1 J l s \sin\alpha}{s^3} = \frac{\varkappa_1 J l \sin\alpha}{s^2}.$$

Nach diesem Gesetz wirkt jedes Teilchen des normal durch den Mittelpunkt einer Kreisscheibe gehenden Stromes auf die magnetischen Einheitspole am Rande. Will man die Wirkung des gesamten Stromes auf einen Pol erhalten, so hat man die Variabele

$$\frac{1}{s^3} = \frac{1}{\sqrt{y^2+\varrho^2}^3} = (y^2+\varrho^2)^{-\frac{3}{2}} = y^{-3}\left(1+\frac{\varrho^2}{y^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \text{ bezw. } \varrho^{-\frac{3}{2}}\left(1+\frac{y^2}{\varrho^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

in einer Reihe zu entwickeln, die konvergent sein mufs, die Summenformel anzuwenden und die Reihe zu summieren. Diese umständliche Rechnung soll nicht vorgenommen werden, da sie nur den Wert einer Probe hat.*) Unten ist sie für Kenner der höheren Analysis als Anmerkung durchgeführt. Das Resultat ist $q = \frac{\varkappa J}{\varrho}$, was mit den Anfangsannahmen dieses Kapitels zusammenfällt. Da die höheren Rechnungen der Anmerkung überflüssig sind, ist hiermit das ganze Gebiet elementar erledigt. Mit Hilfe des Biot-Savartschen Gesetzes läfst sich die elektromotorische Kraft der später zu behandelnden Induktionsströme berechnen.

260) Ersatz des Kreisstromes durch einen unendlich kleinen Magnet. In Nr. 241 wurde gezeigt, dafs ein kleiner Magnet

---

*) Analytisch zeigt sich folgendes: Setzt man $l = dy$, $s = \sqrt{\varrho^2+y^2}$, so handelt es sich für den Draht von A bis zu unendlicher Höhe um die Gesamtwirkung

$$\sum q = 2\varkappa_1 J \int_0^\infty \frac{\varrho\, dy}{2\sqrt{\varrho^2+y^2}^3} = \varkappa_1 J \varrho \int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{\varrho^2+y^2}^3} = \varkappa_1 J \varrho \left|\frac{y}{\varrho^2\sqrt{\varrho^2+y^2}}\right|_0^\infty$$

$$= \frac{\varkappa_1 J}{\varrho}\left|\frac{1}{\sqrt{\frac{\varrho^2}{y^2}+1}}\right|_0^\infty.$$

Die vorletzte Form giebt o für $y = o$, die letzte für $y = \infty$ giebt $\frac{\varkappa_1 J}{\varrho}$. Dies ist die Wirkung des oberen Drahtteils. Der von A nach $-\infty$ gehende giebt eben so viel, die Wirkung ist also $\frac{2\varkappa_1 J}{\varrho}$. Setzt man $2\varkappa_1 = \varkappa$, so folgt für den unbegrenzten Draht $q = \frac{\varkappa J}{\varrho}$, was mit der ursprünglichen Theorie übereinstimmt. Diese Umkehrung zeigt, dafs die oben durch Kunstgriff gefundene Formel richtig ist, ebenso bestätigt sich die obige Gleichung $2\varkappa_1 = \varkappa$.