Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

260) Ersatz des Kreisstromes durch einen unendlich kleinen Magnet

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

ist, ohne Einflufs, denn der Flächeninhalt F_2 ist unverändert geblieben. Also ist wiederum

$$q_2 = \frac{2\varkappa_1 J F_2}{s^3} = \frac{2\varkappa_1 J}{s^3} \cdot \frac{l\varrho}{2} = \frac{\varkappa_1 J l \varrho}{s^3} = \frac{\varkappa_1 J l s \sin\alpha}{s^3} = \frac{\varkappa_1 J l \sin\alpha}{s^2}.$$

Nach diesem Gesetz wirkt jedes Teilchen des normal durch den Mittelpunkt einer Kreisscheibe gehenden Stromes auf die magnetischen Einheitspole am Rande. Will man die Wirkung des gesamten Stromes auf einen Pol erhalten, so hat man die Variabele

$$\frac{1}{s^3} = \frac{1}{\sqrt{y^2+\varrho^2}^3} = (y^2+\varrho^2)^{-\frac{3}{2}} = y^{-3}\left(1+\frac{\varrho^2}{y^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \text{ bezw. } \varrho^{-\frac{3}{2}}\left(1+\frac{y^2}{\varrho^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

in einer Reihe zu entwickeln, die konvergent sein mufs, die Summenformel anzuwenden und die Reihe zu summieren. Diese umständliche Rechnung soll nicht vorgenommen werden, da sie nur den Wert einer Probe hat.*) Unten ist sie für Kenner der höheren Analysis als Anmerkung durchgeführt. Das Resultat ist $q = \frac{\varkappa J}{\varrho}$, was mit den Anfangsannahmen dieses Kapitels zusammenfällt. Da die höheren Rechnungen der Anmerkung überflüssig sind, ist hiermit das ganze Gebiet elementar erledigt. Mit Hilfe des Biot-Savartschen Gesetzes läfst sich die elektromotorische Kraft der später zu behandelnden Induktionsströme berechnen.

260) Ersatz des Kreisstromes durch einen unendlich kleinen Magnet. In Nr. 241 wurde gezeigt, dafs ein kleiner Magnet

---

*) Analytisch zeigt sich folgendes: Setzt man $l = dy$, $s = \sqrt{\varrho^2 + y^2}$, so handelt es sich für den Draht von A bis zu unendlicher Höhe um die Gesamtwirkung

$$\sum q = 2\varkappa_1 J \int_0^\infty \frac{\varrho\, dy}{2\sqrt{\varrho^2+y^2}^3} = \varkappa_1 J \varrho \int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{\varrho^2+y^2}^3} = \varkappa_1 J \varrho \left| \frac{y}{\varrho^2\sqrt{\varrho^2+y^2}} \right|_0^\infty$$

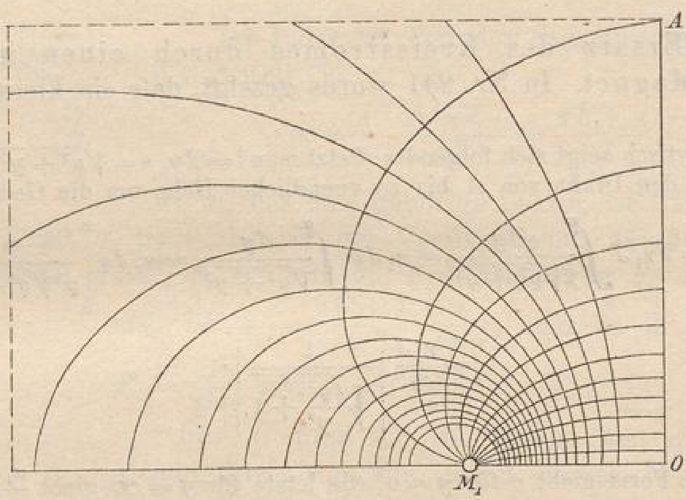
$$= \frac{\varkappa_1 J}{\varrho} \left| \frac{1}{\sqrt{\frac{\varrho^2}{y^2}+1}} \right|_0^\infty.$$

Die vorletzte Form giebt o für $y = o$, die letzte für $y = \infty$ giebt $\frac{\varkappa_1 J}{\varrho}$. Dies ist die Wirkung des oberen Drahtteils. Der von A nach $-\infty$ gehende giebt eben so viel, die Wirkung ist also $\frac{2\varkappa_1 J}{\varrho}$. Setzt man $2\varkappa_1 = \varkappa$, so folgt für den unbegrenzten Draht $q = \frac{\varkappa J}{\varrho}$, was mit der ursprünglichen Theorie übereinstimmt. Diese Umkehrung zeigt, dafs die oben durch Kunstgriff gefundene Formel richtig ist, ebenso bestätigt sich die obige Gleichung $2\varkappa_1 = \varkappa$.

von Länge $2l$ auf einen in der Achse liegenden Einheitspol die Anziehung $p = \pm 4 \frac{ml}{r^3}$ ausübt, wenn m seine Polstärke, r die gegen l grofse Entfernung r ist. Führt man das magnetische Moment $M = 2ml$ ein, so handelt es sich um $\frac{2M}{r^3}$. Oben war für den Kreisstrom die Wirkung $\frac{2\varkappa_1 JF}{s^3} = \frac{2\varkappa_1 J\varrho^2\pi}{s^3}$ ermittelt worden. Für grofse Entfernung ist $s = r$ zu setzen, was $\frac{2\varkappa_1 J\varrho^2\pi}{r^3}$ giebt. Sollen die Wirkungen gleich sein, so hat man $M = \varkappa_1 JF$ zu setzen, wo F die Stromkreisfläche ist. Die Wirkung eines Kreisstromes läfst sich also durch einen kleinen Magnet ersetzen, dessen Moment proportional der Gröfse JF ist. Dies gilt aber nur für gröfsere Entfernungen, so dafs die Methode des magnetischen Blattes vorzuziehen ist.

261) Kraftlinien des Kreisstromes. Nachdem der Potentialwert eines Kreisrings für sämtliche Raumpunkte durch eine allgemeine Formel grundsätzlich bestimmt und für die Achsenpunkte und gewisse Ebenen wirklich ausgerechnet worden ist, können die Niveauflächen und die aus ihnen folgenden Kraftlinien für Kreisströme dargestellt werden. In Fig. 199 ist ein Quadrant der Zeichnung der Kraftlinien

Fig. 199.



eines symmetrischen Normalschnitts durch M dargestellt. Die Rotation um OA und das Legen von Meridianschnitten vollendet das Zellennetz. Das Kurvenbüschel giebt die Niveau-, die Orthogonalschar die Kraftlinien. In der Nähe des kreisförmigen Drahtes haben diese Kreisgestalt. In Fig. 200 sind die um den Draht herum gehenden Kraft-