



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung**

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik

**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig, 1898**

Kapitel XIV. Hydrodynamische Analogien.

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77934](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77934)

## Kapitel XIV.

### Hydrodynamische Analogien.

#### a) Allgemeines.

278) Allgemeine Bemerkungen. Schon früher wurden hydrodynamische Analogien erwähnt, bei denen es sich um Bewegungen einer idealen Flüssigkeit handelte, die so erfolgten, als ob das Fließen in den Krafröhren unendlich kleinen Querschnitts für irgend ein magnetisches Problem (bei nur positiven Massen konnte es auch ein Gravitationsproblem sein) geschehen müßte, und zwar ohne jede Reibung bei absoluter Inkompressibilität. Die Geschwindigkeit in jedem Punkte entsprach dabei nach Größe und Richtung der anziehenden oder abstossenden Kraft des Potentialproblems, das Geschwindigkeitspotential entsprach der Kräftefunktion, d. h. dem eigentlichen Potential. Denkt man sich die Kanalwände weg, so hat man vorauszusetzen, daß die mit nicht ganz gleichen Geschwindigkeiten aneinander hingleitenden Stromfäden keine Reibung aufeinander ausüben, so daß die Flüssigkeitsteilchen nur fortschreitende Bewegungen erhalten, nicht aber sich um die eigene Achse drehen. Gesähe letzteres, so würde der Vorgang ein sehr komplizierter werden, der Raum, in dem es geschähe, würde aus dem Potentialproblem auszuschneiden sein. Man kann überhaupt für den ausgeschlossenen Teil keine Kräftefunktion ausfindig machen, aus der sich die Bewegungen für den Raum ableiten ließen. Dort giebt es kaum Gemeinschaftliches, fast nur Individuelles, man sagt, für diesen Raum existiere kein Potential.

Außerdem muß, da man auf die Trägheit nicht wohl verzichten kann, angenommen werden, daß die Trägheit auf die Größe und Richtung der Bewegungen ohne Einfluß sei. Jedes Teilchen, welches auf einer Kurve zu wandern hat, will ja infolge der Trägheit diese verlassen. Man muß annehmen, daß dieses Bestreben, aus der Bahn zu weichen, irgendwie aufgehoben werde.

Im allgemeinen giebt man den Krafröhren rechteckigen Querschnitt. Betrachtet man einen Rechteckskörper der Flüssigkeit mit den

Kanten  $a, b, c$ , der in einem solchen Kanale fließt, so bleibt er ein Rechteckskörper, jedoch ändern sich die Kantenlängen  $a, b, c$ . Da aber Inkompressibilität angenommen ist, so bleibt der Inhalt  $abc = a_1 b_1 c_1$ , also konstant. Die einem Würfel einbeschriebene Kugel verwandelt sich in ein einbeschriebenes Ellipsoid gleichen Inhalts, es findet für die verschiedenen Gestalten eines Teilchens Affinität in den kleinsten Teilen bei ungeändertem Rauminhalt statt.

Zu dieser Umwandlung ist in der Wirklichkeit ein gewisser Arbeitsaufwand nötig, so daß eigentlich von einem freiwilligen stationären Zustande nicht die Rede sein kann. Von solchen Reibungswiderständen sehen wir ab, um den stationären Zustand zu ermöglichen. Zur Überwindung müßte eine Art von Triebkraft angenommen werden. Den Widerstand einer Zelle der potentiell gleichwertigen Einteilung gegen die betreffende Umformung des Wasserkörpers könnte man definieren als den Quotienten aus der Potentialdifferenz der beiden Grenzflächen (Geschwindigkeitspotential!) und der jeden Querschnitt passierenden Flüssigkeitsmenge. Dies würde eine Reduktion auf die Masseneinheit bedeuten, und damit ganz analog sein der Ausdrucksweise in der Elektrizitätslehre, wo der Widerstand einer Zelle ebenfalls aus dem Quotienten der Potentialunterschiede der beiden Grenzflächen und der passierenden Elektrizitätsmenge erklärt wird. Oben wurde von solchen Betrachtungen absichtlich abgesehen. Die für die Kräfte eines Potentialproblems geltenden Gleichungen  $pw = p_1 w_1$ ,  $pF = p_1 F_1$ ,  $p = \kappa \frac{V_1 - V_2}{w} = \kappa G$  gingen einfach über in Gleichungen für die Geschwindigkeiten, welche lauteten

$$vw = v_1 w_1, vF = v_1 F_1, v = \kappa \frac{V_1 - V_2}{w} = \kappa G.$$

Besonders einfach wurde alles bei den zweidimensionalen Problemen des logarithmischen Potentials. Dort fand überall Einteilung in kleine Quadrate oder ähnliche Rechtecke statt. Die Affinität in den kleinsten Teilen wurde zur Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen. Die Geschwindigkeiten wurden umgekehrt proportional den Dimensionen der kleinen Quadrate. Zu jedem Probleme gehörte ein Vertauschungsproblem, d. h. Strom- und Potentiallinien konnten ihre Rollen wechseln.

Fig. 142 z. B. stellt das System der konfokalen Ellipsen und Hyperbeln dar. Ob die Bewegung in den hyperbolischen oder in den elliptischen Kanälen erfolgt, ist gleichgültig. In letzterem Falle kann man sich den Vorgang folgendermaßen vorstellen. Das Gefäß sei ein elliptischer Cylinder mit einer Einsatzwand, die der Brennlinie entspricht. Um diese Scheidewand herum denke man sich die Flüssigkeit in Bewegung gesetzt, z. B. mit Hilfe von Schaufeln. Nach einiger Zeit werden sich etwaige störende Wirbelbewegungen

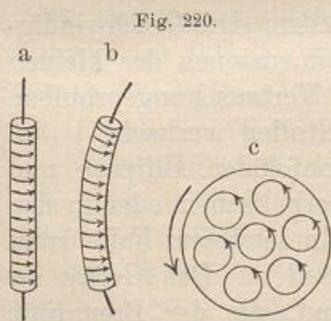
beruhigen, allmählich tritt eine Art stationärer Zirkulation um die Scheidewand herum infolge der Beharrung ein. Diese ist zu untersuchen. Unter den angegebenen Voraussetzungen erfolgt sie so, wie die Figur sie beschreibt.

Entsprechendes findet bei anderen Problemen zweidimensionaler Art statt. Bei Mehrpunktproblemen bzw. ihren Vertauschungsproblemen kann man Einsätze entbehren, es ist aber für die Anschauung gut, sich Cylinder geringen Durchmessers an Stelle der Punkte zu denken, wobei das Zirkulieren der Flüssigkeit verständlicher wird. Man vgl. z. B. Fig. 125, 127, 129, 130. So lassen sich alle Strömungsnetze hydrodynamisch deuten.

Helmholtz ist es gewesen, dem es gelang, den Einfluss von Wirbelbewegungen auf den umgebenden wirbellosen Wasserraum und die gegenseitigen Einwirkungen der Wirbel unter sich in den Grundzügen aufzuklären, indem er die betreffenden Bewegungsgleichungen integrierte. Da hier von höherer Analysis ganz abzusehen ist, müssen wir auf die Wiedergabe seiner Rechnungen verzichten. Das neu erschlossene Gebiet ist aber von derartigem Interesse, dass der Versuch gemacht werden soll, mit Hilfe der von Helmholtz aufgedeckten elektromagnetischen Analogien die stattfindenden Bewegungen zu beschreiben, wobei nur Sätze benutzt werden sollen, die früher abgeleitet wurden. Leser, die der höheren Analysis mächtig sind, würden auf die „Gesammelten Abhandlungen“ von Helmholtz, Bd. I, auf die „Mechanik“ von Kirchhoff, auf Auerbachs „Theoretische Hydrodynamik“ und auf die Inauguraldissertation von Gröbli über Wirbelfäden (Zürich bei Zürcher u. Fugger) zu verweisen sein.

### b) Wirbelbewegungen.

279) Analogien zwischen einem Wirbelfaden und einem elektrischen Strome. Man denke sich



in unbegrenzter Wassermasse einen geraden oder gekrümmten Cylinder, in dem sich eine große Anzahl wirbelnder Elementarcylinder befinden. (Fig. 220.) Fig. c stellt den Querschnitt eines solchen Complexes dar, durch den man an die Ampèresche Darstellung magnetischer Molekularströme erinnert wird, die durch einen Solenoidstrom ersetzt werden können. Es wird sich zeigen, dass, wenn alle Elementarcylinder in gleichem Sinne wirbeln, auch der Gesamtcylinder eine Drehung macht, die bei gleichmäßiger Drehung der Elementarwirbel um den

Mittelpunkt vor sich geht, bei ungleichmäßiger Drehung um den zu definierenden Schwerpunkt erfolgt. Ist der Querschnitt nicht kreisförmig, so hat er periodische Schwankungen durchzumachen u. s. w. Jeder Elementarwirbel wird als Wirbelfaden bezeichnet. Er besteht aus unzähligen Wirbellinien (parallel zu seiner Mittellinie). Die Randgeschwindigkeit seiner Wirbelbewegung an jeder Stelle wird als Geschwindigkeit des Wirbelfadens an dieser Stelle bezeichnet.

Das Produkt aus Randgeschwindigkeit und Querschnitt heisst Intensität des Wirbelfadens.

Wir vergleichen den stationären elektrischen Strom im Drahte und seine elektromagnetisch polarisierte Umgebung mit dem Wirbelfaden im Wasser, die auf die nordmagnetische Einheit ausgeübte Kraftwirkung des ersteren mit der Geschwindigkeit, die der Wirbel einem in entsprechender Lage befindlichen Wasserteilchen giebt. Die Analogien, die von Helmholtz entdeckt sind, sollen beschrieben werden. Vorläufig kann man sich dabei den Wirbelfaden im allgemeinen als geradlinig denken.

a) Der stationäre elektrische Strom hat in allen Teilen des Drahtes dieselbe Intensität, d. h. durch den Querschnitt fließt überall dieselbe Elektrizitätsmenge. Der Querschnitt darf dabei nirgends gleich Null werden, da sonst die hypothetische Flüssigkeit mit unendlicher Geschwindigkeit bezw. Dichte fließen müsste. Der Strom muß also entweder geschlossen sein, oder sich beiderseits ins Unendliche ausdehnen. Analog:

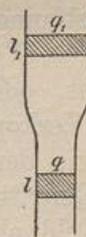
Der Wirbelfaden hat in allen Teilen dieselbe Intensität  $J = qv$ , wo  $q$  den Querschnitt,  $v$  die Randgeschwindigkeit der Wirbelbewegung bedeutet. Der Querschnitt darf nirgends gleich Null werden, da sonst unendlich große Randgeschwindigkeiten stattfinden würden. Der Wirbelfaden erstreckt sich also entweder ins Unbegrenzte, oder er läuft in sich selbst zurück, oder er endet dort, wo die Flüssigkeit zu Ende ist.

Es ist also  $q:q_1 = v_1:v$ . Fig. 221 gilt sowohl für gleiche Stromvolumina, als auch für gleiche Volumina eines Wirbelfadens. Bei gleichwertiger Einteilung ist  $ql = q_1l_1$ , also  $q:q_1 = l_1:l$ . Aus beiden Proportionen folgt  $v_1:v = l_1:l$ . Also:

Die Wirbelgeschwindigkeit am Rande ist umgekehrt proportional dem Querschnitt und direkt proportional den Längen gleicher Volumina des Wirbelfadens.

b) Der stationäre Strom giebt zwar der Verbindungslinie zusammgehöriger Magnetpole eine Richtung, aber er ruft im Dielektri-

Fig. 221.



kum keine Ströme hervor. Nur wenn außer ihm noch Stromleiter oder Ströme vorhanden sind, tritt besonderes ein. Analog:

Ein Wirbelfaden ruft in der wirbellosen Umgebung keine Wirbelbewegungen hervor. Nur wenn noch andere Wirbelfäden vorhanden sind, tritt besonderes ein. Folglich:

Der Wirbelfaden nimmt kein einziges der nicht wirbelnden Moleküle seiner Umgebung in sich auf.

Darf man von der Reibung absehen, so behält er, wie ein stationärer Strom, in allen Teilen dieselbe Energie. Folglich:

Der Wirbelfaden besteht stets aus denselben Wasserteilchen, behält also auch (der Inkompressibilität wegen) stets dasselbe Volumen. Läßt man ihn dünner und dünner werden, so wird er zur Wirbellinie, von der nun konsequenterweise dasselbe gilt.

c) Bewegung des Stromleiters ändert die Intensität und Energie des Stromes nicht, sobald nicht andere Stromleiter in der Nähe sind. Folglich:

Fortschreitende Bewegung eines Wirbels ändert seine Intensität und Energie nicht, sobald nicht andere Wirbel in der Nähe sind.

d) Nach Nr. 248 bzw. Nr. 257 bewegt ein geradliniger Leiter von der Intensität  $J_1$  die Einheit des Nordpols senkrecht gegen die durch Pol und Leiter bestimmte Ebene mit der Kraft

$$p = \frac{\kappa J_1}{\varrho} = \frac{2 \kappa_1 J_1}{\varrho}.$$

Analog:

Ein gerader Wirbelfaden von der Intensität  $J$  giebt jedem Wasserteilchen in der Entfernung  $\varrho$  eine Geschwindigkeit  $v = \frac{J}{\pi \varrho}$  senkrecht gegen die durch Faden und Wasserteilchen bestimmte Ebene und zwar im Sinne der Wirbel-drehung. (Man setzt  $\frac{J}{\pi}$  an Stelle von  $2 \kappa_1 J_1$ .) Die Geschwindigkeit ist umgekehrt proportional  $\varrho$ .

Wodurch dies geschieht, ob durch Reibung, was wahrscheinlich ist, oder durch irgend eine von Hertz und anderen angenommene „Verkoppelung der Moleküle“, das sei dahin gestellt. So gut aber, wie der elektrische Strom vom Momente des Entstehens an bis zum Eintritt des stationären Zustandes Energie an das ihn umgebende Feld abgeben muß, so hat auch der Wirbel Energie abzugeben, bis die stationäre Bewegung der Teilchen des Feldes herbeigeführt ist. Von da ab bleibt seine Energie konstant. Die in Bewegung gesetzten Wasserteilchen drehen sich um die Querschnittsachse des Fadens, aber

nicht um die eigne Achse, so daß man nur von fortschreitender Bewegung zu reden braucht.

e) Das Stromteilchen  $AB = l$  übt nach Figur 198 und der zugehörigen Erläuterung auf die in der Entfernung  $s$  von ihm in der Entfernung  $\rho = s \sin \alpha$  vom Faden befindliche nordmagnetische Einheit die ablenkende Kraft

$$p = \frac{2 \kappa_1 J F_2}{s^3} = \frac{\kappa_1 J_1 l \sin \alpha}{s^2}$$

aus, wo  $F_2$  die vom Teilchen und dem Stromelemente  $l$  gebildete Dreiecksfläche ist. Setzt man auch hier  $\frac{J}{\pi}$  an Stelle von  $2 \kappa_1 J_1$ , so gilt analog:

Jedes Teilchen des Wirbelfadens vom Volumen  $ql$  und der Wirbelgeschwindigkeit  $\kappa$ , also von der Intensität  $q\kappa = J$ , giebt jedem Wasserteilchen, welches von ihm die Entfernung  $s$ , von der Drehachse die Entfernung  $\rho = s \sin \alpha$  hat, die Geschwindigkeit

$$v = \frac{Jl \sin \alpha}{\pi s^2} = \frac{q\kappa l \sin \alpha}{\pi s^2} = \frac{q\kappa F}{\pi s^3},$$

wo  $F$  dieselbe Bedeutung, wie vorher hat. Das Drehungsbestreben führt also nach Erreichung des stationären Zustandes zu einer Geschwindigkeit, die direkt proportional dem Ausdrucke  $q\kappa l \sin \alpha$  und umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstands  $s$  ist.

Genauere Vorstellungen von einem Wirbelfaden werden sich aus dem Folgenden ergeben.

### 280) Zwei und mehrere Elementarfäden.

a) Befinden sich im Wasserraum zwei oder mehrere Wirbelfäden von gleichen Intensitäten und übereinstimmendem Drehungssinn, so ist  $A$  bestrebt dem Wirbel  $B$  und seiner Umgebung die fortschreitende Geschwindigkeit  $v_b = \frac{J}{\pi \rho}$  zu geben.  $B$  wirkt in demselben Sinne auf  $A$  ein. Es resultiert für beide Wirbelfäden eine Drehung um den Halbierungspunkt  $S$  der Strecke  $AB$ . Denkt man sich die Intensitäten der Wirbel  $A$  und  $B$  dort als Massen angebracht, so ist  $S$  der Schwerpunkt. Beide Wirbel wirken auf die Gerade  $AB$  so drehend ein, als ob jeder ein Kräftepaar wäre. (Vgl. das Aufsetzen zweier Kreisel in die Vertiefungen  $A$  und  $B$  eines

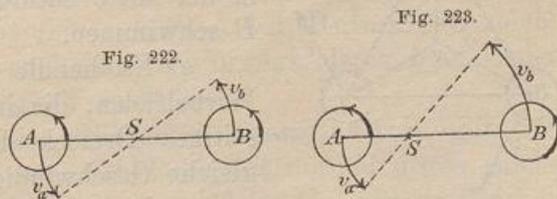
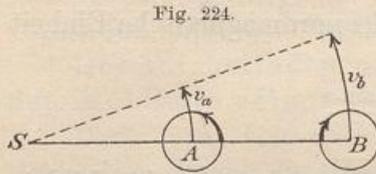


Fig. 222.

Fig. 223.

um  $S$  drehbaren Balkens, wobei eine Drehung des letzteren entsteht. Schmidtsche Kreisel-Versuche.)

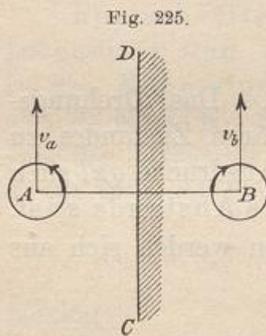
b) Verhalten sich die Intensitäten der beiden Wirbel wie 2:1, so teilt der Drehungspunkt  $S$  die Linie ebenso, wie die Massen 2 und 1 in  $A$  bzw.  $B$ , denn  $\frac{J_a}{\pi \rho} : \frac{J_b}{\pi \rho} = 2:1$ . (Fig. 223.)



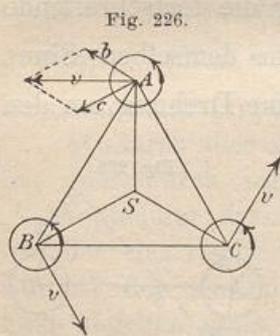
c) Drehen die Wirbel entgegengesetzt, so ist es ähnlich, wie bei entgegengesetzten Kräften (bzw. Massen).

Der Schwerpunkt fällt außerhalb. Auch jetzt ist er das Centrum der Drehbewegung. (Fig. 224.)

d) Sind dabei die Intensitäten absolut genommen einander gleich, so fällt  $S$  in unendliche Entfernung, wie bei einem Kräftepaar, beide Wirbel wandern mit der Geschwindigkeit  $\frac{J}{\pi \rho}$  in derselben Richtung vorwärts. In diesem Falle ist  $B$  das Spiegelbild von  $A$ . Man kann die Mittellinie  $CD$  als feste Wand betrachten und  $B$  entfernen, ohne daß sich für  $A$  etwas ändert.  $A$  wandert in der Nähe einer festen Wand parallel derselben vorwärts mit der Geschwindigkeit  $\frac{J}{\pi \rho}$ . Es verhält sich wie ein Schwimmer, der mit der linken Hand richtig rudert, mit der Rechten aber eine Gegenbewegung macht. In der That wird links von  $A$  alles Wasser zurückgetrieben, rechts von  $A$  eine weit kleinere Wassermenge vorwärts getrieben. Durch die Differenz der Gegenwirkungen beider Aktionen entsteht die Geschwindigkeit von  $A$ .



Ähnlich ist es, wenn  $A$  und  $B$  (ohne die Wand) aufeinander wirken.  $A$  rudert richtig mit der linken,  $B$  mit der rechten Hand, jeder falsch mit der anderen Hand. Das Wasser außerhalb  $AB$  wird rückwärts, das zwischen  $AB$  vorwärts getrieben, in der Mitte naturgemäß schneller, als  $A$  und  $B$  schwimmen.



e) Es handle sich um drei gleichwertige Wirbelfäden, die in der Zeichnung ein gleichseitiges Dreieck bilden. Jeder erhält zwei gleiche Geschwindigkeiten senkrecht gegen die entsprechenden Dreiecksseiten, deren Resultante senkrecht zur Mittellinie steht. So entsteht Drehbewegung um den Mittelpunkt  $S$  des Dreiecks ohne sonstige Änderungen.

So entsteht Drehbewegung um den Mittelpunkt  $S$  des Dreiecks ohne sonstige Änderungen.

f) Ebenso ist es bei jeder Anordnung nach den Ecken eines regelmäßigen Polygons, ebenso bei homogener Ausfüllung einer Kreisfläche mit gleichwertigen Wirbeln. Stets entsteht Drehung um den Mittelpunkt.

g) Sind drei gleichwertige Wirbel allgemein gelagert und bildet man die Resultanten, so stehen diese im allgemeinen nicht mehr senkrecht auf den Schwerpunktstransversalen, der Schwerpunkt ruht bei der Bewegung, aber die Gestalt des Dreiecks macht periodische Änderungen durch, da die einzelnen Wirbel sich bald von  $S$  entfernen, bald in grössere Nähe gelangen. (Figur für  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 1$ ,  $m_3 = -1$  siehe bei Gröbli, Seite 22.) Die Untersuchung des Gestaltenwechsels ist elementar nicht durchzuführen. Ebenso treten Wandelungen der Gestalt ein, wenn die Wirbel eine Ellipsenfläche gleichmässig erfüllen, worüber man Kirchhoffs Mechanik vergleiche.

Stets aber ruht der Schwerpunkt des Komplexes von Wirbeln.

Diesen Schwerpunkt findet man, wenn man jeden Wirbel durch eine seiner Intensität entsprechende Masse ersetzt.

Das Ruhen des Schwerpunktes gilt nicht nur von den Wirbelcylindern, die aus Wirbelfäden bestehen, sondern auch von den aus Wirbellinien bestehenden Wirbelfäden, sobald man sich im Normalchnitt die Punkte der Wirbellinien mit Massen belegt denkt, die ihren Umdrehungsgeschwindigkeiten proportional sind.

Damit ist die genauere Vorstellung des Wirbelfadens geschaffen, die oben unverständlich geblieben sein würde. Auch erkennt man jetzt, warum oben von Strombewegungen und fortschreitenden Bewegungen der Wirbelfäden gesprochen wurde.

Von den krummlinigen Wirbelfäden sollen nur unendlich dünn zu denkende kreisförmige Wirbelringe behandelt werden, die aus den unten anzugebenden Gründen von hervorragender Wichtigkeit für die neueren physikalischen Theorien geworden sind. Sämtliche Wirbellinien eines solchen Ringes sind als kreisförmig aufzufassen. Jeder Raucher kann bekanntlich solche Ringe sichtbar hervorbringen. Bei ruhigem Wetter bildet der auspuffende Dampf einer stillstehenden Lokomotive oder eines Dampfrohrs bisweilen sehr schöne Wirbelringe. Mit Hilfe einer Kreisscheibe (eines Löffels) hat Helmholtz solche im Wasser hervorgebracht, auch halbkreisförmige, deren freie Enden an der Oberfläche der Flüssigkeit ausliefen.

Was oben über geradlinige Wirbelfäden gesagt wurde, gilt, bei-läufig bemerkt, auch dann, wenn die Flüssigkeit normal gegen solche durch Ebenen begrenzt ist, also z. B. für senkrechte Fäden in Teichen von überall gleicher Tiefe. Es handelt sich eben dann um zweidimensionale Probleme.

281) Ein vereinzelter kreisförmiger Wirbelring. In Nr. 257 und an Fig. 196 war die Wirkung eines Kreisstroms von Intensität  $J_1$  auf einen Punkt seiner Achse berechnet worden, wenn für diesen der halbe Gesichtswinkel gleich  $\gamma$  war. Es ergab sich als Potential

$$1) \quad V = \pi \kappa J_1 (1 - \cos \gamma) = 2 \kappa_1 \pi J_1 (1 - \cos \gamma),$$

als anziehende bzw. abstossende Kraft

$$2) \quad p = \frac{r^2 \pi \kappa J_1}{s^3} = \frac{F \kappa J_1}{s^3} = \frac{2 \kappa_1 F J_1}{s^3},$$

wo  $s$  den Abstand des Einheitspols von der Peripherie,  $F$  die Fläche des Kreisstroms bedeutete. Für den Mittelpunkt des letzteren war

$$3) \quad p_m = \frac{\kappa \pi J_1}{r} = \frac{2 \kappa_1 \pi J_1}{r}.$$

Setzt man auch hier für  $2 \kappa_1 J_1$  den Ausdruck  $\frac{J}{\pi}$  ein, so erhält man für den kreisförmigen Wirbelring, der als unendlich dünn zu betrachten ist, die Gleichungen

$$1*) \quad V = J (1 - \cos \gamma)$$

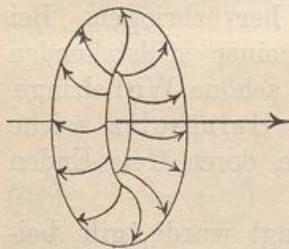
$$2*) \quad v = \frac{F J}{\pi s^3}$$

$$3*) \quad v_m = \frac{J}{\pi r}.$$

Ist damit auch nur das Geschwindigkeitspotential für die Punkte der Achse und ihre Geschwindigkeit selbst berechnet, so reicht dies doch hin, ein allgemeines Bild von dem Vorgange zu geben.

Denkt man sich durch die Achse einen Meridianschnitt gelegt, so erhält man als Schnitt zwei entgegengesetzte Wirbel, die nach

Fig. 227.



Nr. 289 aufeinander so einwirken, daß beide vorwärts wandern. Da dasselbe mit je zweien geschieht, so erhält der gesamte Ring eine Fortbewegung in der Richtung des Pfeiles. Diese ist ganz naturgemäfs, weil durch das ganze Innere des Ringes nur wenig Wasser vorwärts getrieben wird, während alles Wasser, welches auferhalb des zugehörigen Cylinders liegt, rückwärts gestofsen wird. Die Differenz der Gegenwirkungen treibt den Ring vorwärts.

(Wenn Auerbach in der citierten Preisschrift sagt, der Ring würde durch die energisch durch sein Inneres strömenden Wassermassen mitgerissen, so wird die Wirkung mit der Ursache verwechselt. Der

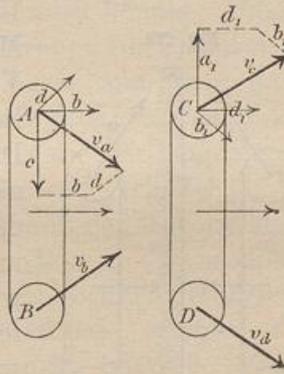
Grund ist derselbe, wie bei jedem Meridianschnitt für sich und bei Fig. 225. Die Geschwindigkeit des Ringes selbst ist schwierig zu berechnen, da auf jeden seiner Wirbelteile von Länge  $l$  sämtliche anderen wirken.

Beim stationären Zustande ist die Geschwindigkeit des Ringes konstant, ebenso unveränderlich sind seine Dimensionen und seine Kreisgestalt, ebenso unveränderlich ist seine Intensität und Energie. Dabei ist natürlich von der Reibung ganz abgesehen, die in der Wirklichkeit die Ringe bald zur Auflösung gelangen läßt. Ohne die Reibung würde der Ring unveränderlich dem unendlichen Bereiche zuwandern.

282) Zwei parallele, gleichartige Wirbelringe. Helmholtz schildert, ohne den Beweis zu geben, das Verhalten parallel gestellter Wirbelringe. Kirchhoff citiert die Bemerkungen ebenfalls ohne Beweis. Beschränkt man sich auf die Betrachtung der Wirbel eines Meridianschnitts, so läßt sich der Vorgang einigermaßen begründen, was hier versucht werden soll. Der Wirbel  $A$  erhält, abgesehen von den übrigen Einwirkungen, Bewegungsantriebe von  $B$ ,  $C$  und  $D$  aus, die umgekehrt proportional den wirklichen Entfernungen sind. Die Resultanten für  $A$  und  $B$ ,  $v_a$  und  $v_b$  sind so gerichtet, daß man das Bestreben des Ringes erkennt, sich zu verkleinern, d. h. sich zusammen zu ziehen. Weil er stets dasselbe Volumen hat, schwellen dafür die Flächen  $A$  und  $B$  an. Weil ferner  $A$  und  $B$  bei gleichbleibender Energie einander näher rücken, wird die Wassergeschwindigkeit bei dem Schwerpunkte  $S$  und ebenso die Selbstkomponente, d. h. die Fortbewegungsgeschwindigkeit des Wirbelringes verstärkt, während er sich beständig verkleinert.

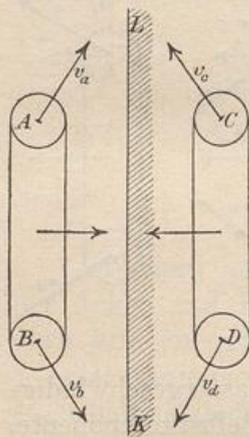
Entgegengesetztes geschieht bei  $C$  und  $D$ , wo die Resultanten  $v_c$  und  $v_d$  nach außen gehen. Der Hauptradius dieses Ringes vergrößert, sein Querschnitt verkleinert sich. Weil  $C$  und  $D$  auseinander rücken, wird die eigene fortschreitende Bewegung vermindert. Die Folge ist, daß der Ring  $CD$  von  $AB$  eingeholt wird, daß der kleiner gewordene und entsprechend beschleunigte  $AB$  durch den größer gewordenen und verlangsamten  $CD$  schnell hindurchschlüpft. Sofort verlangsamt sich  $AB$ , während  $CD$  beschleunigt wird, beide Ringe haben die Rollen vertauscht, im übrigen wiederholt sich der Vorgang. Er würde sich in Ewigkeit wiederholen, wenn keine Reibung vorhanden wäre.

Fig. 228.



Geschickte Raucher können auch diesen Vorgang, den Verfasser selbst bei Lokomotiven mehrfach beobachtet hat, wiederholen. Helmholtz hat ihn durch schnelle wiederholte Bewegungen eines Löffels im Wasser ebenfalls sichtbar gemacht. Das wechselnde Durcheinanderschlüpfen erscheint für den ersten Augenblick überraschend. Die Erscheinung wird aber verständlich, sobald man nur einen einzigen fortschreitenden Ring betrachtet. Bei diesem befinden sich bald die einen, bald die anderen Elementarwirbel außen, durchschlüpfen sich also gegenseitig. Das wechselnde Erweitern und Zusammenziehen, das Addieren und Subtrahieren der fortschreitenden Bewegung und der Drehung um die Mittellinie des Ringes, also die wechselnden Verlangsamungen und Beschleunigungen sind notwendig und selbstverständlich zugleich.

283) Zwei ungleichartige Wirbelringe. Fig. 229 stellt parallele Wirbellringe von entgegengesetzter Bewegung dar. Dieselbe Überlegung, wie oben, giebt für die Wirbel eines Meridianschnittes Bewegungsantriebe, die auf Vergrößerung des Durchmessers und Verlangsamung beider Ringe hinarbeiten. Da  $A$  und  $C$ , ebenso  $B$  und  $D$  einander immer näher rücken, wird im Einklang mit Fig. 134 das Parallellaufen mit der Symmetrielinie allmählich herbeigeführt, denn die übrigen Einwirkungen nehmen allmählich ab, weil die Entfernungen größer und größer werden. Dabei werden die einzelnen Wirbel schließlich so dünn, daß endlich die Ringe als aufgelöst zu betrachten sind.



Bezüglich der Symmetrieebenen kann man dieselben Betrachtungen anstellen, wie bei Fig. 134. Nähert sich der Ring  $AB$  bei seiner Wanderung einer Wand  $KL$ , so wirkt diese ebenso auf ihn, wie sein Spiegelbild  $CD$ , er verlangsamt seinen Gang, schwillt an und löst sich allmählich auf.

284) Schlufsbemerkung über Wirbelfäden. Das hier Gegebene bestand nur aus Beschreibungen der Vorgänge auf Grund der von Helmholtz entdeckten Analogien. Die eigentlichen Beweise wurden nicht gegeben. Es handelte sich nur um einen flüchtigen Einblick in ein Gebiet, auf dem Cauchy, Hankel, Thomson, Beltrami, Roch, Dini, Lipschitz, Maxwell, Helmholtz, Kirchhoff, Tait, Rankine und andere erfolgreich gearbeitet haben. Diese Theorie ist um so wichtiger, als Thomson versucht hat, als Grundlage der

mathematischen Physik eine Theorie der Wirbelatome aufzubauen. Bekanntlich haben wir über die Natur der Materie zwei einander entgegengesetzte Hypothesen, die der Kontinuität, und die der diskreten Atome. Die Theorie bedient sich, je nach Bedarf, bald der einen, bald der anderen Anschauung. Das Bedürfnis, zwischen beiden zu vermitteln, wurde von jeher empfunden.

Rankine machte einen ersten Vermittelungsversuch. Thomson unternahm einen zweiten mit Hilfe der angedeuteten Lehre von den Wirbeln, die schon bei Maxwell eine so bedeutungsvolle Rolle spielten. Er wurde dazu veranlaßt durch den konstanten Charakter der Wirbelringe und ihre der vollkommenen Elastizität entsprechenden Fähigkeit, sich auszudehnen oder zusammenzuziehen. Das Ganze hängt mit den Hertz'schen Bestrebungen zusammen, die Kräfte aus der Mechanik zu eliminieren und die Vorgänge auf Bewegungsvorgänge zwischen den irgendwie verkoppelten Molekülen zurückzuführen.

Auch darüber haben Überlegungen stattgefunden, ob etwa der Begriff der Trägheit und der Energie entbehrt werden könnte. Diese Frage ist unentschieden geblieben. Während eine Gruppe von Physikern, wie Ostwald, die Energie als ein gegebenes Agens annehmen und das Energieprinzip als ein allgemeines Naturgesetz proklamieren, sind Hertz, Boltzmann, Plank und andere gegen diese Stellungnahme aufgetreten und auch Helmholtz hat sich ablehnend verhalten.

Man sieht daraus, daß man sich zunächst mit der Theorie der Wirbelbewegungen zu beschäftigen hat, wenn man in die neueren physikalischen Theorien eindringen und an den augenblicklich geführten Geisteskämpfen teilnehmen will. Aus diesem Grunde erschien es zweckmäßig, auch solchen Lesern, die noch nicht imstande sind, die Integration der hydrodynamischen Differentialgleichungen von Helmholtz zu verfolgen, wenigstens eine Beschreibung der einfachsten Bewegungsvorgänge auf dem Gebiete der Wirbelfäden und Wirbelringe zu geben.

Schließlich sei darauf aufmerksam gemacht, daß Dr. Rausenberger im Programm 1895 der Adlerfluchtschule zu Frankfurt a. M. den Versuch gemacht hat, die Helmholtz'schen Wirbelbewegungen für die Lehre von den Wirbelstürmen zu verwerten, wobei er auf seine Schrift über diesen Gegenstand im Jahrgange 1889 des Freien Deutschen Hochstifts verweist.

Von geringerer Bedeutung ist die nachstehend bearbeitete Analogie der elektrischen Strömung in ebenen Platten mit der von Dr. Forchheimer aufgestellten Theorie der Grundwasserbewegung in der Umgebung von Brunnenanlagen und Sickerschlitzten. Lassen sich hier auch berechnete Einwände machen, so bietet die Auffassung doch mancherlei Interessantes.

c) Forchheimers Theorie der Grundwasserbewegung in der Umgebung von Brunnen und Sickerschlitzten.

285) Die Grundhypothese. Die Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover enthielt im 7. Hefte des Jahrgangs 1886 eine Abhandlung des Prof. Dr. Forchheimer über die Ergiebigkeit von Brunnenanlagen und Sickerschlitzten, die eine interessante Anwendung der besprochenen Isothermenscharen darbietet. Die Berechnungen schlossen sich nach eigener Angabe des Verfassers an unsere Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften an.

Die zu Grunde gelegte einfache Hypothese kann folgendermaßen formuliert werden:

Die Geschwindigkeit einer stationären Strömung des Grundwassers ist proportional dem Gefällverhältnis seiner Oberfläche, im übrigen aber unabhängig von der Tiefe.

Gegen diese Annahme lassen sich zwar Bedenken erheben, aber als Annäherungsannahme darf man sie innerhalb gewisser Grenzen gelten lassen, da die Resultate durchaus nicht widerspruchsvoll erscheinen und einfach und fälschlich auszusprechen sind. Andere Theorien haben entsprechendes noch nicht geleistet. Daher soll der Versuch gemacht werden, eine elementare Einführung auch in dieses interessante Gebiet zu geben, bei der ein einfacherer Gang, als der von Forchheimer gewählte, eingeschlagen werden soll.

Um für die Sache zu interessieren, schicken wir das Resultat voraus:

Die Projektion der Niveau- und Stromlinien der Grundwasserstände giebt ein isothermisches Netz. Ist  $z = f(xy) + c$  die Potentialfläche für eine Wärme- oder Elektrizitätsströmung, so ist  $z^2 = f(xy) + c$  oder  $z = \sqrt{f(xy) + c}$  die Gleichung für die Oberfläche des Grundwassers bei der entsprechenden Strömung. Gemäfs der Proportion  $1:\sqrt{z}:\sqrt{z}:z$  hat man also nur für 1 und jede Ordinate die mittlere Proportionale zu konstruieren, um aus der einen dieser Flächen die andere abzuleiten.

286) Die Parallelströmung. Mit der einfachen Parallelströmung soll begonnen werden, und zwar an der Hand des folgenden Problems.

Man denke sich zwei Seen verschiedenen Wasserstandes durch einen geradlinigen, überall gleich breiten Damm voneinander getrennt, dessen Grenzflächen als senkrecht angenommen werden. In welcher Weise geschieht das Durchsickern des Wassers?

An jeder Stelle ist, der obigen Hypothese entsprechend,

$$1) \quad v = -\alpha \frac{h_2 - h_1}{x_2 - x_1} = -\alpha \tan \vartheta,$$

wenn die Grundwasserströmung in der Richtung von links nach rechts vor sich geht. Hier ist  $\alpha$  eine konstante Gröfse, die der Durchlässigkeit des Erdmaterials entspricht,  $\vartheta$  ist der (negative) Neigungswinkel der Grundwasseroberfläche. Die in der Zeiteinheit durch eine senkrechte Fläche, die auch die Strömungsrichtung senkrecht schneidet, passierende Wassermenge ist also

$$2) \quad Q = -by\alpha \tan \vartheta,$$

wenn  $b$  die Breite des Rechtecks,  $y$  die von der undurchlässigen Schicht bis zur Oberfläche gemessene Höhe ist. Da nun der Zustand als ein stationärer betrachtet werden soll, muß durch ein anderes Rechteck von derselben Breite  $b$ , aber anderer Höhe  $y_1$  und anderem Winkel  $\vartheta_1$  dieselbe Menge

$$2*) \quad Q = -by_1\alpha \tan \vartheta_1$$

gehen. Daraus folgt aber

$$-by\alpha \tan \vartheta = -by_1\alpha \tan \vartheta_1$$

oder

$$3) \quad \frac{y}{y_1} = \frac{\tan \vartheta_1}{\tan \vartheta}.$$

Die Einstellung des Grundwassers geschieht also stets so, daß die Höhen umgekehrt proportional den Tangenten der Neigung seiner Oberfläche sind.

Durch die Gleichung 3) ist aber eine Parabel charakterisiert, deren Achse in der undurchlässigen Schicht liegt. Für jeden Punkt  $P$  ist nämlich bei dieser Kurve  $\tan \alpha = -\frac{y}{2x}$ , also ist für zwei Parabelpunkte

$$\frac{\tan \vartheta_1}{\tan \vartheta} = \frac{-\frac{y_1}{2x_1}}{-\frac{y}{2x}} = \frac{y_1}{y} \frac{x}{x_1}.$$

Nach bekannter Parabeleigenschaft ist zugleich  $\frac{y^2}{y_1^2} = \frac{x}{x_1}$ , also

$$\frac{y}{y_1} = \frac{y_1}{y} \frac{x}{x_1}.$$

Fig. 230.

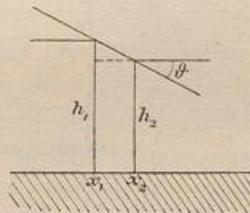
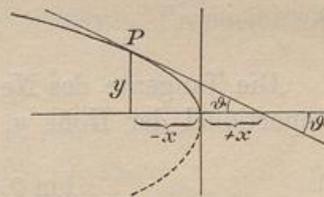


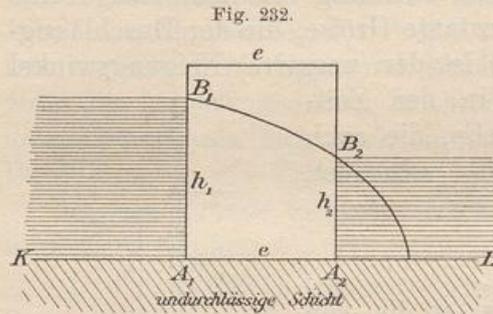
Fig. 231.



Da die rechten Seiten übereinstimmen, gilt dasselbe von den linken Seiten, und so folgt Gleichung 3).

Aus  $\frac{y^2}{y_1^2} = \frac{x}{x_1}$  folgt  $y^2 = y_1^2 \frac{x}{x_1} = 2y_1 \frac{y_1}{2x_1} x = 2y_1 \tan \alpha_1 x$ , oder nach 2\*)

$$4) \quad y^2 = -\frac{2Q}{b\alpha} x.$$



Es handelt sich also um diejenige Parabel, deren Achse in die Grenzlinie  $KL$  der undurchlässigen Schicht fällt, und die durch die Niveaupunkte  $B_1$  und  $B_2$  geht. Der Scheitel  $S$  ist

Nullpunkt des Koordinatensystems.

Aus den besonderen Werten

$$h_1^2 = -\frac{2Q}{b\alpha} x_1 \quad \text{und} \quad h_2^2 = -\frac{2Q}{b\alpha} x_2$$

folgt zunächst

$$h_1^2 - h_2^2 = -\frac{2Q}{b\alpha} (x_1 - x_2) = \frac{2Q}{b\alpha} (x_2 - x_1) = \frac{2Q}{b\alpha} e,$$

so dafs

$$5) \quad Q = \frac{b\alpha (h_1^2 - h_2^2)}{2e}$$

ist. Folglich:

Der Sickerverlust ist umgekehrt proportional der Dammbreite  $e$ , direkt proportional der Länge  $b$ , der Durchlaufkonstanten  $\alpha$  und der Differenz der Quadrate der Grenzhöhen  $h_1$  und  $h_2$ .

Nach 5) läfst sich die Parabelgleichung 4) umformen in

$$6) \quad y^2 = -\frac{h_1^2 - h_2^2}{e} x.$$

Die Tangente des Neigungswinkels für jede Stelle ist umgekehrt proportional der Höhe  $y$ , nämlich

$$7) \quad \tan \vartheta = -\frac{Q}{b\alpha y} = -\frac{h_1^2 - h_2^2}{2ey},$$

die Geschwindigkeit ist ebenfalls umgekehrt proportional der Höhe  $y$ , da

$$8) \quad v = -\alpha \tan \vartheta = \alpha \frac{h_1^2 - h_2^2}{2ey}.$$

Die Entfernung  $A_1S$  ist nach 6)

$$x_1 = -\frac{eh_1^2}{h_1^2 - h_2^2} = -\frac{e}{1 - \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2}.$$

Den Höchstwert des Sickerverlustes erhält man für  $h_2 = 0$ . Er ist gleich  $\frac{bxh_1^2}{2e}$ . Die zugehörige Geschwindigkeit würde unendlich groß sein, da nach 8)  $y = 0$  in den Nenner treten würde.

[Dieser praktisch unmögliche Grenzfall ist der schwache Punkt der Theorie, der sich zunächst dadurch erledigt, daß das ausströmende Wasser stets eine bestimmte endliche Höhe  $h_2$  hat, so daß der Grenzfall überhaupt niemals erreicht wird. Er entspricht der unendlichen Geschwindigkeit der Elektrizität bei punktförmigen Elektroden. Bedenklich aber bleibt, daß in der Nähe von  $S$  Geschwindigkeiten stattfinden würden, welche die überhaupt mögliche Ausflugs geschwindigkeit  $v = \sqrt{2gh_1}$  übertreffen, die der Dammbreite  $e = 0$  entspricht. Es handelt sich also um eine Annäherungstheorie, die nur brauchbar sein kann, wenn  $A_2S$  nicht zu kleine Werte annimmt.]

Wichtig für unsere Zwecke ist nun folgendes: Die Gleichung

$$y = -\frac{2Q}{bx} x$$

würde eine ebene Schrägfläche geben, wie sie bei der Parallelströmung der Wärme und Elektrizität auftrat. Hier aber handelt es sich um

$$y = \sqrt{-\frac{2Q}{bx} x}.$$

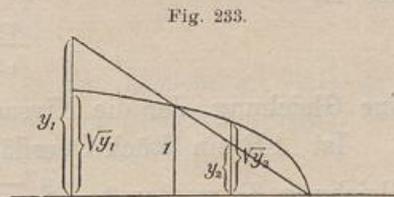
Man kann also die zweite Fläche aus der ersten dadurch ableiten, daß man an jeder Stelle geometrisch die Quadratwurzel der Ordinate bildet. Gemäß der Proportion

$$1 : \sqrt{y} = \sqrt{y} : y$$

handelt es sich um die Konstruktion der mittleren Proportionalen zu 1 und  $y$ . (Fig. 233.)

Für den Fall der Parallelströmung hat sich also das vorausgesagte Resultat bestätigt.

Liegt die undurchlässige Schicht in unendlicher Tiefe, so werden die Dimensionen der Parabel unendlich groß, d. h. es handelt sich um die gerade Linie  $B_1B_2$ . Für diesen Fall stimmt also die Potentialfläche der Grundwasserströmung mit



der der elektrischen Strömung nach dem Ohmschen Gesetze überein. Der Umstand, daß Prof. Forchheimer den Fall unendlicher Tiefe an die Spitze seiner Abhandlung stellt, erschwert ihr Studium und läßt die Theorie als künstlicher erscheinen, als sie in Wirklichkeit ist.

287) Radialströmung. Das Grundwasser ströme von allen Seiten her in stationärer Weise einem Brunnen mit kontinuierlichem Betriebe zu. Um mathematische Einfachheit zu erhalten denke man sich eine etwa aus Dünen sand bestehende kreisförmige, eigentlich cylindrisch begrenzte Insel im Meere und in ihrer Mitte einen bis zur horizontal gedachten undurchlässigen Schicht reichenden Brunnenschacht. Der ursprüngliche Grundwasserstand entspricht dann der Meeresoberfläche. Durch den Pumpbetrieb senkt sich der Wasserstand im Brunnen so lange, bis infolge der wachsenden Steilheit der Oberfläche des Grundwassers dessen Nachströmen stark genug geworden ist, um die Wasserentnahme auszugleichen. Von da ab bleibt seine Oberfläche konstant.

Jetzt ist nach der Theorie an jeder Stelle

$$1) \quad v = + \kappa \tan \vartheta,$$

denn  $\tan \vartheta$  ist der Senkung wegen für jeden Radius negativ, aber auch  $v$  ist negativ, weil die Strömung dem zunehmenden Radius entgegengerichtet ist.

Die in der Zeiteinheit jeden der konzentrischen Cylinder durchströmende Wassermasse ist also

$$2) \quad Q = 2 r \pi y \kappa \tan \vartheta,$$

wo  $r$  den Radius,  $y$  die Höhe des Cylinders, von der Grundsicht aus gemessen, bedeutet. Für einen bestimmten Cylinder sei

$$2^*) \quad Q = 2 r_1 \pi y_1 \kappa \tan \vartheta_1.$$

Aus der Gleichsetzung der linken Seiten folgt

$$r y \tan \vartheta = r_1 y_1 \tan \vartheta_1,$$

also ist

$$3) \quad \frac{r y}{r_1 y_1} = \frac{\tan \vartheta_1}{\tan \vartheta},$$

eine Gleichung, der die Niveaufläche genügen muß.

Ist  $AB$  ein Stück Oberfläche, jetzt steigend gedacht, so ist nach Gleichung 3) wo  $\tan \vartheta = \frac{y'' - y'}{r'' - r'}$  zu setzen ist

$$3^*) \quad y(y'' - y') = r_1 y_1 \tan \vartheta_1 \frac{r'' - r'}{r} = \frac{c_1}{r} (r'' - r').$$

Die linke Seite kann aufgefaßt werden als Schicht eines Dreiecks, welches in jeder Höhe  $y$  den Querschnitt  $y$  hat, dessen Inhalt von irgend einer Höhe  $y_1$  bis zu einer andern  $y$  von der Größe  $\frac{y^2}{2} - \frac{y_1^2}{2}$  ist. Den Ausdruck rechts kann man auffassen als Horizontalstreifen einer Fläche, die in jeder Höhe  $r$  den Querschnitt  $\frac{c_1}{r}$  hat, d. h. einer gleichseitigen Hyperbel, die bekanntlich von der Höhe 1 bis zur Höhe  $r$  gemessen den Inhalt  $c_1 \lg r - c_1 \lg 1 = c_1 \lg r$  hat. Nun stimmen nach 3\*) je zwei zusammengehörige Streifen beider Flächen überein, rechnet man also die letztere von 1 bis  $r$ , die erstere vom zugehörigen  $y_1$  bis zum zugehörigen  $y$ , so muß die Summe der Schichten der einen gleich der entsprechenden Summe der andern sein, d. h. es muß werden

$$\frac{y^2}{2} - \frac{y_1^2}{2} = c_1 \lg r = r_1 y_1 \tan \vartheta_1 \lg r$$

oder

$$y^2 = 2 r_1 y_1 \tan \vartheta_1 \lg r + y_1^2.$$

Dieser Gleichung müssen also auch die Koordinaten der Kurven des Grundwasserstandes genügen.

Die Gleichung läßt sich unter Berücksichtigung von 2\*) auch schreiben

$$4) \quad y^2 = \frac{Q}{\pi \kappa} \lg r + y_1^2$$

oder auch

$$4*) \quad y = \sqrt{\frac{Q}{\pi \kappa} \lg r + y_1^2}.$$

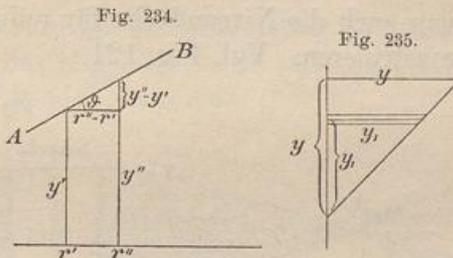
Nun steht aber diese Gleichung zur Gleichung

$$5) \quad y = \frac{Q}{\pi \kappa} \lg r + y_1^2,$$

die eine logarithmische Linie darstellt, in der Beziehung, daß die Ordinaten der Kurve 4\*) die Quadratwurzeln aus denen der Kurve 5) sind, d. h. daß jede Ordinate von 4\*) gemäß der Proportion

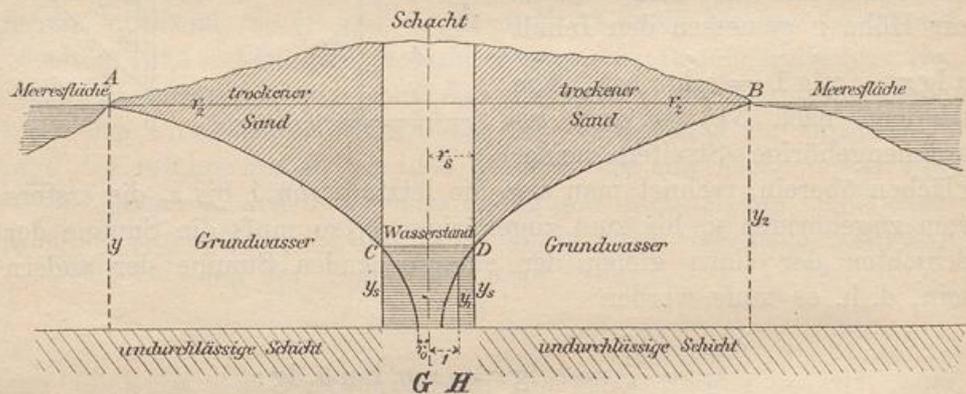
$$1 : \sqrt{y_1} = \sqrt{y_1} : y_1$$

als mittlere Proportionale zur Strecke 1 und zur Ordinate  $y_1$  konstruiert werden kann. Dies entspricht der im Anfang gegebenen Voraussagung.



Die durch 5) dargestellte Potentialfläche entspricht dem Falle der Ausströmung der Elektrizität aus einem Punkte der unbegrenzten Platte, der die Elektrizität auf einem sehr großen Kreise zugeleitet wurde. Bei 4) handelt es sich um die entsprechende Wasserstandsfläche, deren Ordinaten durch Wurzelausziehung gefunden werden. Wie man die logarithmische Potentialfläche elementar konstruieren kann, so kann man auch die Niveaufäche für radiale Grundwasserströmung elementar konstruieren. Vgl. Fig. 121.

Fig. 236.



Die Zeichnung stellt den Vorgang schematisch dar.  $AB = 2r_2$  ist der Durchmesser der Insel und zugleich die Linie des ursprünglichen Grundwasserstandes.  $HDB$  ist eine der durch Gleichung 4) dargestellten Kurven.

Ist  $r_s$  der Radius des Schachtes und  $y_s$  die zu  $r_s$  gehörige Ordinate der Kurve,  $y_2$  die zu  $r_2$  gehörige, so folgt nach 4) für diese Stellen

$$y_2^2 = \frac{Q}{\pi \kappa} \lg r_2 + y_1^2,$$

$$y_s^2 = \frac{Q}{\pi \kappa} \lg r_s + y_1^2,$$

also durch beiderseitige Subtraktion

$$6) \quad y_2^2 - y_s^2 = \frac{Q}{\pi \kappa} (\lg r_2 - \lg r_s) = \frac{Q}{\pi \kappa} \lg \left( \frac{r_2}{r_s} \right).$$

Die dem Wasserstande  $y_s$  des Brunnens zugehörige Wasserentnahme  $Q$ , d. h. seine Ergiebigkeit für diese Einstellung, ist

$$7) \quad Q = \frac{\pi \kappa (y_2^2 - y_s^2)}{\lg r_2 - \lg r_s} = \frac{\pi \kappa (y_2^2 - y_s^2)}{\lg \left( \frac{r_2}{r_s} \right)}.$$

Die Ergiebigkeit bei stationärem Betriebe ist also umgekehrt proportional dem Logarithmus des Radienverhältnisses  $\frac{r_2}{r_s}$  und direkt proportional der Durchlässigkeitskonstante  $\kappa$  und der Quadratdifferenz der Grenzhöhen, d. h. dem Ausdrucke  $(y_2^2 - y_s^2)$ .

Die Analogie mit den Formeln für die Parallelströmung fällt sofort in die Augen. Nach 6), wo für  $y_2$  das allgemeine  $y$  zu setzen ist, läßt sich die Gleichung der Niveaufläche auch schreiben

$$8) \quad y^2 - y_s^2 = \frac{Q}{\pi \kappa} (\lg r - \lg r_s),$$

oder, indem man den Wert von  $Q$  aus 7) einsetzt:

$$9) \quad \frac{y^2 - y_s^2}{y_2^2 - y_s^2} = \frac{\lg r - \lg r_s}{\lg r_2 - \lg r_s} = \frac{\lg \frac{r_2}{r_s}}{\lg \frac{r}{r_s}}.$$

Damit ist eine rein geometrische Gleichung gefunden, die nur von gemessenen Längen abhängig ist.

Wäre z. B.  $r_2 = 1000$  m,  $r_s = 1$  m,  $y_2 = 30$  m,  $y_s = 20$  m, so würde die Gleichung der Niveaufläche lauten

$$\frac{y^2 - 20^2}{30^2 - 20^2} = \frac{\lg \frac{r}{1}}{\lg \frac{1000}{1}} = \frac{\lg r}{\lg 1000} = \frac{\frac{1}{m} \lg r}{\frac{1}{m} \lg 1000} = \frac{10 \lg r}{10 \lg 1000} = \frac{10 \lg r}{3},$$

oder

$$y = \sqrt{\frac{500}{3} \lg r + 400}.$$

Die Kurve trifft die Grundfläche an der Stelle, wo  $\frac{500}{3} \lg r = -400$  ist, also  $\lg r = -\frac{1200}{500} = -2,4$  oder  $\lg \frac{1}{r} = 2,4$ , d. h.  $\frac{1}{r} = 251$ , so dafs die Entfernung von der Schachtachse gleich  $\frac{1}{251}$  m ist.

Jede Niveaukurve setzt sich auf die Grundschicht senkrecht auf, denn nach Gleichung 3) ist  $\tan \vartheta = \frac{r_1 y_1 \vartheta_1}{r y}$ , was für  $y = 0$  unendlich wird und  $\vartheta = 90^\circ$  macht.

Zum obigen ganz willkürlichen Beispiele gehört nach 7) die Ergiebigkeit

$$Q = \frac{\pi \kappa (30^2 - 20^2)}{\lg \frac{1000}{1}} = \frac{500 \pi \kappa}{\frac{1}{m} \lg 1000} = \frac{500 \pi \kappa m}{10 \lg 1000} = \frac{500}{3} 0,434 \cdot \pi \kappa = \sim 227 \kappa.$$

Wäre z. B.  $\alpha = \frac{1}{200}$ , so würde die Ergiebigkeit für jede Sekunde gleich 1,135 cbm sein. Kennt man umgekehrt durch Pumpversuche  $\alpha = 1$  cbm, so würde  $\alpha = \frac{1}{227}$  sein, und zwar für den entsprechenden Dünensand, für den nun alle Aufgaben leicht zu lösen sein werden, z. B. auch für die Parallelströmung.

Wäre z. B. ein Bassin zur Ebbezeit mit seiner Wasseroberfläche 10 m über der undurchlässigen Schicht, die Meeresoberfläche selbst 9 m und würde die Trennung, rein schematisch gedacht, durch einen Damm von Dünensand in der Breite von 20 m herbeigeführt, so würde der Sickerverlust nach den obigen Formeln für das laufende Meter der Dammlänge sein

$$Q = \frac{b\alpha(h_1^2 - h_2^2)}{2e} = 1 \cdot \frac{1}{227} (10^2 - 9^2) \cdot \frac{1}{2 \cdot 20} = \frac{19}{9080} \text{ cbm} = \sim 2 \text{ Liter}$$

auf die Sekunde.

Dabei ist jedoch das unmögliche Schema der Figur angenommen, denn der Dünensand wird sich nicht mit senkrechten Wänden einstellen. Auch der Wert von  $\alpha$  ist hier ganz willkürlich im Anschluss an das obige Beispiel angenommen.

Rückt die Wand des Schachtes allzunahe an die Stelle heran, wo die Kurve sich auf die Grundfläche aufsetzt, so werden aus denselben Gründen, wie bei der Parallelströmung, die Formeln unbrauchbar.

288) **Bemerkung.** Es fragt sich, ob, wie bei der Parallelströmung, für unendliche Tiefe der Grundschicht der Unterschied zwischen der jetzt behandelten Niveaufäche und den früheren Potentialflächen aufhört. Zu diesem Zwecke schreibe man Gleichung 8) in der Form

$$(y + y_s)(y - y_s) = \frac{Q}{\pi\alpha} (\lg r - \lg r_s)$$

oder

$$y - y_s = \frac{Q}{\pi\alpha(y + y_s)} (\lg r - \lg r_s).$$

Ist nun  $y$  und auch  $y_s$  sehr groß, so kann man statt  $y + y_s$  schreiben  $2y_s$ , denn der endliche Unterschied darf gegen  $2y_s$  vernachlässigt werden. Dies verwandelt die Gleichung in

$$y - y_s = \frac{Q}{2\pi\alpha y_s} (\lg r - \lg r_s).$$

Dies aber ist die Gleichung einer gewöhnlichen logarithmischen Linie. Die Niveaufäche für sehr große Tiefen stimmt also überein mit einer gewissen Potentialfläche für elektrische Strömung.

289) **Folgerungen.** Aus den Gleichungen lassen sich gewisse Proportionen ablesen. Bildet man z. B. Gleichung 7) für zwei Fälle,

die sich nur bezüglich der Verhältnisse  $\frac{r_2}{r_s} = q$  und  $\frac{r_2'}{r_s'} = q'$  unterscheiden, so erhält man durch Division für die Ergiebigkeiten das Verhältnis

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{\lg\left(\frac{r_2}{r_s}\right)}{\lg\left(\frac{r_2'}{r_s'}\right)} = \frac{\lg q'}{\lg q}.$$

Setzt man  $q = e^n$ ,  $q' = e^{n'}$ , so folgt

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{n'}{n}.$$

Sollen sich die Ergiebigkeiten wie 1:2 verhalten, so muß  $q = e^n$ ,  $q' = e^{2n}$ , also  $q' = q^2$  sein, sollen sich die Ergiebigkeiten wie 1:n verhalten, so muß  $q' = q^n$  sein.

Projiziert man bei einer solchen Niveaufläche die zu den Höhen

$$\sqrt{c}, \sqrt{2c}, \sqrt{3c}, \sqrt{4c}, \dots$$

gehörigen Niveaulinien auf die Grundfläche, so entstehen konzentrische Kreise, deren Radien in geometrischer Reihe aufeinander folgen, z. B. nach der Reihe

$$e^1, e^{2c_1}, e^{3c_1}, e^{4c_1}, \dots$$

Dies folgt daraus, daß bei der entsprechenden Potentialfläche für elektrische Strömung die zu diesen Kreisen gehörigen Ordinaten nach dem Gesetz

$$c, 2c, 3c, 4c, \dots$$

aufeinander folgen, für die Niveaufläche aber die Wurzeln auszuziehen sind.

Befindet sich der Brunnenschacht im Binnenlande auf ausgedehnter Grundwasser führender Ebene, so kann man die obigen Resultate mit um so größerer Annäherung als richtig benutzen, je ausgedehnter die Ebene bei homogenem Materiale ist. Allerdings ließe sich einwenden, daß, je länger der Pumpbetrieb dauert, der Radius  $r_2$ , der dann Schnitte der Niveaukurve durch die Grundwasserebene giebt, größer und größer werden müsse. Dies ändert aber für die nähere Umgebung des Brunnens schliesslich doch nichts.

#### 290) Beispiele.

a) Nachdem der Zusammenhang mit dem logarithmischen Potential einmal klar gelegt ist, lassen sich zahlreiche Resultate ohne weiteres aussprechen.

Liegt der Brunnenschacht auf kreisförmiger Insel excentrisch, so bilde man zu dem betreffenden Punkte  $P$  den reciproken  $Q$  und lege durch  $P$  und  $Q$  ein Kreisbüschel nebst zugeordneter Kreisschar. Vgl. Fig. 127. Die Kreise des Büschels sind Stromlinien, die Kreise der Schar sind Niveaulinien des Grundwassers. An Stelle der Gleichung 4\*) tritt

$$y^2 = \frac{Q}{\pi\kappa} \lg \frac{r_1}{r_2} + y_1^2$$

oder

$$y = \sqrt{\frac{Q}{\pi\kappa} (\lg r_1 - \lg r_2) + y_1^2}.$$

Befindet sich der Brunnen in der Umgebung einer geradlinigen Küste, so hat man zu  $P$  nur das Spiegelbild zu bilden und wie vorher zu verfahren.

b) Handelt es sich um zwei Brunnenschächte auf unbegrenzter Ebene, deren Betrieb ein gleichartiger ist, so wird Fig. 125 maßgebend, d. h. die Stromlinien sind ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln, die Niveaulinien konfokale Lemniskaten 2<sup>ter</sup> Ordnung. An Stelle von Gleichung 4) tritt

$$y^2 = \frac{Q}{\pi\kappa} \lg (r_1 r_2) + y_1^2$$

oder

$$y = \sqrt{\frac{Q}{\pi\kappa} (\lg r_1 + \lg r_2) + y_1^2}.$$

Sind die Ergiebigkeiten der Brunnen verschieden, verhalten sie sich z. B. wie  $\nu_1 : \nu_2$ , so handelt es sich um die Niveaufkurven und Niveauflächen

$$y = \sqrt{\frac{Q}{\pi\kappa} (\lg r_1^{\nu_1} + \lg r_2^{\nu_2}) + y_1^2}$$

oder

$$y = \sqrt{\frac{Q}{\pi\kappa} (\nu_1 \lg r_1 + \nu_2 \lg r_2) + y_1^2} = \sqrt{\frac{Q}{\pi\kappa} \lg (r_1^{\nu_1} r_2^{\nu_2}) + y_1^2}.$$

Ebenso wird bei  $n$  Brunnen von der Ergiebigkeit  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$  die Gleichung

$$y = \sqrt{\frac{Q}{\pi\kappa} (\nu_1 \lg r_1 + \nu_2 \lg r_2 + \nu_3 \lg r_3 + \dots + \nu_n \lg r_n) + y_1^2}$$

oder

$$y^2 - y_1^2 = \frac{Q}{\pi\kappa} \sum \nu_i \lg r_i.$$

Dem Leser bleibe es überlassen, weitere Übungsbeispiele zu bilden.

Geschieht z. B. das Auspumpen mit Hilfe eines Sickerschlitzes, so wird Fig. 140 in Kraft treten, bei der es sich um konfokale Ellipsen und Hyperbeln handelt. Die Gleichung geht über in

$$y^2 - y_1^2 = \frac{Q}{2\pi} \lg \left[ \frac{p+q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - 1} \right],$$

wenn die Länge des Schlitzes gleich 1 gesetzt wird.

Durch Abbildungen wie  $Z = \sqrt{2}$  kann man zu andern Formen der Sickerschlitzes übergehen.

In allen Fällen erhält man Gleichungen von der Form

$$y^2 - y_1^2 = c \cdot V,$$

wo  $V$  das entsprechende logarithmische Potential ist.

Da aber dies nur noch den Wert von Übungsbeispielen hat, soll von weiterem abgesehen werden. Man versuche, andere Zeichnungen dieses Werkes oder der „Isogonalen Verwandtschaften“ entsprechend zu deuten.

291) Schlusswort. Der Leser hat in dem Vorgetragenen eine Reihe von Eigenschaften des Potentials und ziemlich viele Anwendungen dieser Funktion auf die Gebiete der Gravitation, der Elektrostatik und des Magnetismus, des Elektromagnetismus und der Elektrodynamik, auf die Lehre von den stationären Strömungen der Wärme, der Elektrizität und idealen inkompressiblen Flüssigkeiten, auf die Lehre von den freien Ausflusstrahlen, von den Wirbelbewegungen und den Bewegungen des Grundwassers kennen gelernt. Der Zusammenhang mit den Faradayschen Kraftlinien führte zu den Faraday-Maxwellschen Anschauungen, zur Vorstellung der Wirbelfelder und zu den Hertzschen Schwingungen über. Auch über die Elastizitätslehre, über die Kapillarthorie und über die Lehre von den Hodographen hätten elementare Betrachtungen herangezogen werden können. Je weiter man aber eindringt, um so mehr macht sich das Bedürfnis geltend, mit den Waffen der höheren Analysis zu arbeiten. Die analytische Behandlung der Potentialtheorie wird jedoch jedem Leser erleichtert sein, der hier bereits einen ersten vorläufigen Einblick in diese Lehre erhalten hat.

Bezüglich der Gravitation findet man noch einiges Elementare in Schells „Theorie der Bewegung und der Kräfte“, wo mehrere Probleme über die Anziehung homogener Linien, Flächen und einfach gestalteter Körper geometrisch bezw. mit Hilfsmitteln der gewöhnlichen Arithmetik behandelt sind. Namentlich bei Schalen, die

durch ähnliche Ellipsoide begrenzt sind, kann die höhere Analysis entbehrt werden, wie schon Newton gezeigt hat. Vgl. die Zusätze.

In Schellbachs „Neuen Elementen der Mechanik“ findet man ebenfalls einige elementar behandelte Probleme aus der Lehre von der Gravitation, die hier absichtlich übergangen wurden, insbesondere die Lösung der Aufgabe, die Gestalt des Körpers größter Attraktion zu bestimmen.

Vorgeschrittene Leser mögen auf die Originalabhandlungen von Gauß, auf die von Grube herausgegebenen Vorlesungen Dirichlets über die Kräfte, die umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung wirken, auf die Schrift von Clausius über das Potential und die Potentialfunktion und auf folgende Werke Neumanns verwiesen werden, die, wie das früher citierte, sämtlich bei Teubner erschienen sind: „Beiträge zur mathematischen Physik“, „Hydrodynamische Untersuchungen nebst Anhang über Elektrostatik und magnetische Induktion“, „Untersuchungen über das logarithmische Potential“. Endlich seien noch das Werk von Beer über die Elektrizitätslehre und Kirchhoffs Vorlesungen über mathematische Physik, auch die entsprechenden Vorlesungen des älteren Neumann genannt. Bezüglich der elektromagnetischen Theorie des Lichtes sei auf die Helmholtzschen Vorlesungen, herausgegeben von König und Runge (Hamburg und Leipzig bei Voss) und auf das entsprechende Werk von Tumlirz (bei B. G. Teubner erschienen) verwiesen. Auch der bald erscheinende 4. Band von Wüllners Experimentalphysik wird das Nötigste darüber enthalten. Auf Poincaré war bereits im Texte hingewiesen.

Mit diesen Andeutungen sei unsere elementare Einführung in die Theorie des Potentials und seiner wichtigsten Anwendungen beschlossen.