



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung**

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik

**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig, 1898**

a) Allgemeines

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77934](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77934)

## Kapitel XIV.

### Hydrodynamische Analogien.

---

#### a) Allgemeines.

278) Allgemeine Bemerkungen. Schon früher wurden hydrodynamische Analogien erwähnt, bei denen es sich um Bewegungen einer idealen Flüssigkeit handelte, die so erfolgten, als ob das Fließen in den Krafröhren unendlich kleinen Querschnitts für irgend ein magnetisches Problem (bei nur positiven Massen konnte es auch ein Gravitationsproblem sein) geschehen müßte, und zwar ohne jede Reibung bei absoluter Inkompressibilität. Die Geschwindigkeit in jedem Punkte entsprach dabei nach Größe und Richtung der anziehenden oder abstossenden Kraft des Potentialproblems, das Geschwindigkeitspotential entsprach der Kräftefunktion, d. h. dem eigentlichen Potential. Denkt man sich die Kanalwände weg, so hat man vorauszusetzen, daß die mit nicht ganz gleichen Geschwindigkeiten aneinander hingleitenden Stromfäden keine Reibung aufeinander ausüben, so daß die Flüssigkeitsteilchen nur fortschreitende Bewegungen erhalten, nicht aber sich um die eigene Achse drehen. Gesähe letzteres, so würde der Vorgang ein sehr komplizierter werden, der Raum, in dem es geschähe, würde aus dem Potentialproblem auszuschneiden sein. Man kann überhaupt für den ausgeschlossenen Teil keine Kräftefunktion ausfindig machen, aus der sich die Bewegungen für den Raum ableiten ließen. Dort giebt es kaum Gemeinschaftliches, fast nur Individuelles, man sagt, für diesen Raum existiere kein Potential.

Außerdem muß, da man auf die Trägheit nicht wohl verzichten kann, angenommen werden, daß die Trägheit auf die Größe und Richtung der Bewegungen ohne Einfluß sei. Jedes Teilchen, welches auf einer Kurve zu wandern hat, will ja infolge der Trägheit diese verlassen. Man muß annehmen, daß dieses Bestreben, aus der Bahn zu weichen, irgendwie aufgehoben werde.

Im allgemeinen giebt man den Krafröhren rechteckigen Querschnitt. Betrachtet man einen Rechteckskörper der Flüssigkeit mit den

Kanten  $a, b, c$ , der in einem solchen Kanale fließt, so bleibt er ein Rechteckskörper, jedoch ändern sich die Kantenlängen  $a, b, c$ . Da aber Inkompressibilität angenommen ist, so bleibt der Inhalt  $abc = a_1 b_1 c_1$ , also konstant. Die einem Würfel einbeschriebene Kugel verwandelt sich in ein einbeschriebenes Ellipsoid gleichen Inhalts, es findet für die verschiedenen Gestalten eines Teilchens Affinität in den kleinsten Teilen bei ungeändertem Rauminhalt statt.

Zu dieser Umwandlung ist in der Wirklichkeit ein gewisser Arbeitsaufwand nötig, so daß eigentlich von einem freiwilligen stationären Zustande nicht die Rede sein kann. Von solchen Reibungswiderständen sehen wir ab, um den stationären Zustand zu ermöglichen. Zur Überwindung müßte eine Art von Triebkraft angenommen werden. Den Widerstand einer Zelle der potentiell gleichwertigen Einteilung gegen die betreffende Umformung des Wasserkörpers könnte man definieren als den Quotienten aus der Potentialdifferenz der beiden Grenzflächen (Geschwindigkeitspotential!) und der jeden Querschnitt passierenden Flüssigkeitsmenge. Dies würde eine Reduktion auf die Masseneinheit bedeuten, und damit ganz analog sein der Ausdrucksweise in der Elektrizitätslehre, wo der Widerstand einer Zelle ebenfalls aus dem Quotienten der Potentialunterschiede der beiden Grenzflächen und der passierenden Elektrizitätsmenge erklärt wird. Oben wurde von solchen Betrachtungen absichtlich abgesehen. Die für die Kräfte eines Potentialproblems geltenden Gleichungen  $pw = p_1 w_1$ ,  $pF = p_1 F_1$ ,  $p = \kappa \frac{V_1 - V_2}{w} = \kappa G$  gingen einfach über in Gleichungen für die Geschwindigkeiten, welche lauteten

$$vw = v_1 w_1, vF = v_1 F_1, v = \kappa \frac{V_1 - V_2}{w} = \kappa G.$$

Besonders einfach wurde alles bei den zweidimensionalen Problemen des logarithmischen Potentials. Dort fand überall Einteilung in kleine Quadrate oder ähnliche Rechtecke statt. Die Affinität in den kleinsten Teilen wurde zur Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen. Die Geschwindigkeiten wurden umgekehrt proportional den Dimensionen der kleinen Quadrate. Zu jedem Probleme gehörte ein Vertauschungsproblem, d. h. Strom- und Potentiallinien konnten ihre Rollen wechseln.

Fig. 142 z. B. stellt das System der konfokalen Ellipsen und Hyperbeln dar. Ob die Bewegung in den hyperbolischen oder in den elliptischen Kanälen erfolgt, ist gleichgültig. In letzterem Falle kann man sich den Vorgang folgendermaßen vorstellen. Das Gefäß sei ein elliptischer Cylinder mit einer Einsatzwand, die der Brennlinie entspricht. Um diese Scheidewand herum denke man sich die Flüssigkeit in Bewegung gesetzt, z. B. mit Hilfe von Schaufeln. Nach einiger Zeit werden sich etwaige störende Wirbelbewegungen

beruhigen, allmählich tritt eine Art stationärer Zirkulation um die Scheidewand herum infolge der Beharrung ein. Diese ist zu untersuchen. Unter den angegebenen Voraussetzungen erfolgt sie so, wie die Figur sie beschreibt.

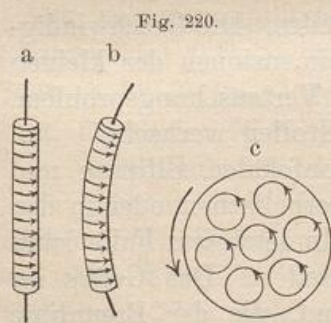
Entsprechendes findet bei anderen Problemen zweidimensionaler Art statt. Bei Mehrpunktproblemen bzw. ihren Vertauschungsproblemen kann man Einsätze entbehren, es ist aber für die Anschauung gut, sich Cylinder geringen Durchmessers an Stelle der Punkte zu denken, wobei das Zirkulieren der Flüssigkeit verständlicher wird. Man vgl. z. B. Fig. 125, 127, 129, 130. So lassen sich alle Strömungsnetze hydrodynamisch deuten.

Helmholtz ist es gewesen, dem es gelang, den Einfluss von Wirbelbewegungen auf den umgebenden wirbellosen Wasserraum und die gegenseitigen Einwirkungen der Wirbel unter sich in den Grundzügen aufzuklären, indem er die betreffenden Bewegungsgleichungen integrierte. Da hier von höherer Analysis ganz abzusehen ist, müssen wir auf die Wiedergabe seiner Rechnungen verzichten. Das neu erschlossene Gebiet ist aber von derartigem Interesse, dass der Versuch gemacht werden soll, mit Hilfe der von Helmholtz aufgedeckten elektromagnetischen Analogien die stattfindenden Bewegungen zu beschreiben, wobei nur Sätze benutzt werden sollen, die früher abgeleitet wurden. Leser, die der höheren Analysis mächtig sind, würden auf die „Gesammelten Abhandlungen“ von Helmholtz, Bd. I, auf die „Mechanik“ von Kirchhoff, auf Auerbachs „Theoretische Hydrodynamik“ und auf die Inauguraldissertation von Gröbli über Wirbelfäden (Zürich bei Zürcher u. Fugger) zu verweisen sein.

### b) Wirbelbewegungen.

279) Analogien zwischen einem Wirbelfaden und einem elektrischen Strome. Man denke sich

in unbegrenzter Wassermasse einen geraden oder gekrümmten Cylinder, in dem sich eine große Anzahl wirbelnder Elementarcylinder befinden. (Fig. 220.) Fig. c stellt den Querschnitt eines solchen Complexes dar, durch den man an die Ampèresche Darstellung magnetischer Molekularströme erinnert wird, die durch einen Solenoidstrom ersetzt werden können. Es wird sich zeigen, dass, wenn alle Elementarcylinder



in gleichem Sinne wirbeln, auch der Gesamtcylinder eine Drehung macht, die bei gleichmäßiger Drehung der Elementarwirbel um den