



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

279) Analogien zwischen einem Wirbelfaden und einem elektrischen
Strome

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77934](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77934)

beruhigen, allmählich tritt eine Art stationärer Zirkulation um die Scheidewand herum infolge der Beharrung ein. Diese ist zu untersuchen. Unter den angegebenen Voraussetzungen erfolgt sie so, wie die Figur sie beschreibt.

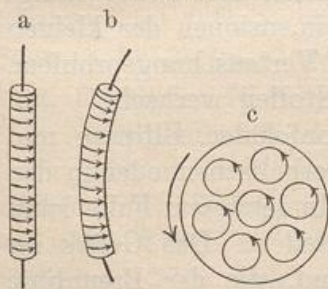
Entsprechendes findet bei anderen Problemen zweidimensionaler Art statt. Bei Mehrpunktproblemen bzw. ihren Vertauschungsproblemen kann man Einsätze entbehren, es ist aber für die Anschauung gut, sich Cylinder geringen Durchmessers an Stelle der Punkte zu denken, wobei das Zirkulieren der Flüssigkeit verständlicher wird. Man vgl. z. B. Fig. 125, 127, 129, 130. So lassen sich alle Strömungsnetze hydrodynamisch deuten.

Helmholtz ist es gewesen, dem es gelang, den Einfluss von Wirbelbewegungen auf den umgebenden wirbellosen Wasserraum und die gegenseitigen Einwirkungen der Wirbel unter sich in den Grundzügen aufzuklären, indem er die betreffenden Bewegungsgleichungen integrierte. Da hier von höherer Analysis ganz abzusehen ist, müssen wir auf die Wiedergabe seiner Rechnungen verzichten. Das neu erschlossene Gebiet ist aber von derartigem Interesse, dass der Versuch gemacht werden soll, mit Hilfe der von Helmholtz aufgedeckten elektromagnetischen Analogien die stattfindenden Bewegungen zu beschreiben, wobei nur Sätze benutzt werden sollen, die früher abgeleitet wurden. Leser, die der höheren Analysis mächtig sind, würden auf die „Gesammelten Abhandlungen“ von Helmholtz, Bd. I, auf die „Mechanik“ von Kirchhoff, auf Auerbachs „Theoretische Hydrodynamik“ und auf die Inauguraldissertation von Gröbli über Wirbelfäden (Zürich bei Zürcher u. Fugger) zu verweisen sein.

b) Wirbelbewegungen.

279) Analogien zwischen einem Wirbelfaden und einem elektrischen Strome. Man denke sich

Fig. 220.



in unbegrenzter Wassermasse einen geraden oder gekrümmten Cylinder, in dem sich eine große Anzahl wirbelnder Elementarcylinder befinden. (Fig. 220.) Fig. c stellt den Querschnitt eines solchen Complexes dar, durch den man an die Ampèresche Darstellung magnetischer Molekularströme erinnert wird, die durch einen Solenoidstrom ersetzt werden können. Es wird sich zeigen, dass, wenn alle Elementarcylinder in gleichem Sinne wirbeln, auch der Gesamtcylinder eine Drehung macht, die bei gleichmäßiger Drehung der Elementarwirbel um den

Mittelpunkt vor sich geht, bei ungleichmäßiger Drehung um den zu definierenden Schwerpunkt erfolgt. Ist der Querschnitt nicht kreisförmig, so hat er periodische Schwankungen durchzumachen u. s. w. Jeder Elementarwirbel wird als Wirbelfaden bezeichnet. Er besteht aus unzähligen Wirbellinien (parallel zu seiner Mittellinie). Die Randgeschwindigkeit seiner Wirbelbewegung an jeder Stelle wird als Geschwindigkeit des Wirbelfadens an dieser Stelle bezeichnet.

Das Produkt aus Randgeschwindigkeit und Querschnitt heisst Intensität des Wirbelfadens.

Wir vergleichen den stationären elektrischen Strom im Drahte und seine elektromagnetisch polarisierte Umgebung mit dem Wirbelfaden im Wasser, die auf die nordmagnetische Einheit ausgeübte Kraftwirkung des ersteren mit der Geschwindigkeit, die der Wirbel einem in entsprechender Lage befindlichen Wasserteilchen giebt. Die Analogien, die von Helmholtz entdeckt sind, sollen beschrieben werden. Vorläufig kann man sich dabei den Wirbelfaden im allgemeinen als geradlinig denken.

a) Der stationäre elektrische Strom hat in allen Teilen des Drahtes dieselbe Intensität, d. h. durch den Querschnitt fließt überall dieselbe Elektrizitätsmenge. Der Querschnitt darf dabei nirgends gleich Null werden, da sonst die hypothetische Flüssigkeit mit unendlicher Geschwindigkeit bezw. Dichte fließen müsste. Der Strom muß also entweder geschlossen sein, oder sich beiderseits ins Unendliche ausdehnen. Analog:

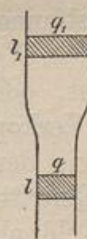
Der Wirbelfaden hat in allen Teilen dieselbe Intensität $J = qv$, wo q den Querschnitt, v die Randgeschwindigkeit der Wirbelbewegung bedeutet. Der Querschnitt darf nirgends gleich Null werden, da sonst unendlich große Randgeschwindigkeiten stattfinden würden. Der Wirbelfaden erstreckt sich also entweder ins Unbegrenzte, oder er läuft in sich selbst zurück, oder er endet dort, wo die Flüssigkeit zu Ende ist.

Es ist also $q:q_1 = v_1:v$. Fig. 221 gilt sowohl für gleiche Stromvolumina, als auch für gleiche Volumina eines Wirbelfadens. Bei gleichwertiger Einteilung ist $ql = q_1l_1$, also $q:q_1 = l_1:l$. Aus beiden Proportionen folgt $v_1:v = l_1:l$. Also:

Die Wirbelgeschwindigkeit am Rande ist umgekehrt proportional dem Querschnitt und direkt proportional den Längen gleicher Volumina des Wirbelfadens.

b) Der stationäre Strom giebt zwar der Verbindungslinie zusammengehöriger Magnetpole eine Richtung, aber er ruft im Dielektri-

Fig. 221.



kum keine Ströme hervor. Nur wenn außer ihm noch Stromleiter oder Ströme vorhanden sind, tritt besonderes ein. Analog:

Ein Wirbelfaden ruft in der wirbellosen Umgebung keine Wirbelbewegungen hervor. Nur wenn noch andere Wirbelfäden vorhanden sind, tritt besonderes ein. Folglich:

Der Wirbelfaden nimmt kein einziges der nicht wirbelnden Moleküle seiner Umgebung in sich auf.

Darf man von der Reibung absehen, so behält er, wie ein stationärer Strom, in allen Teilen dieselbe Energie. Folglich:

Der Wirbelfaden besteht stets aus denselben Wasserteilchen, behält also auch (der Inkompressibilität wegen) stets dasselbe Volumen. Läßt man ihn dünner und dünner werden, so wird er zur Wirbellinie, von der nun konsequenterweise dasselbe gilt.

c) Bewegung des Stromleiters ändert die Intensität und Energie des Stromes nicht, sobald nicht andere Stromleiter in der Nähe sind. Folglich:

Fortschreitende Bewegung eines Wirbels ändert seine Intensität und Energie nicht, sobald nicht andere Wirbel in der Nähe sind.

d) Nach Nr. 248 bzw. Nr. 257 bewegt ein geradliniger Leiter von der Intensität J_1 die Einheit des Nordpols senkrecht gegen die durch Pol und Leiter bestimmte Ebene mit der Kraft

$$p = \frac{\kappa J_1}{\rho} = \frac{2 \kappa_1 J_1}{\rho}.$$

Analog:

Ein gerader Wirbelfaden von der Intensität J giebt jedem Wasserteilchen in der Entfernung ρ eine Geschwindigkeit $v = \frac{J}{\pi \rho}$ senkrecht gegen die durch Faden und Wasserteilchen bestimmte Ebene und zwar im Sinne der Wirbel-drehung. (Man setzt $\frac{J}{\pi}$ an Stelle von $2 \kappa_1 J_1$.) Die Geschwindigkeit ist umgekehrt proportional ρ .

Wodurch dies geschieht, ob durch Reibung, was wahrscheinlich ist, oder durch irgend eine von Hertz und anderen angenommene „Verkoppelung der Moleküle“, das sei dahin gestellt. So gut aber, wie der elektrische Strom vom Momente des Entstehens an bis zum Eintritt des stationären Zustandes Energie an das ihn umgebende Feld abgeben muß, so hat auch der Wirbel Energie abzugeben, bis die stationäre Bewegung der Teilchen des Feldes herbeigeführt ist. Von da ab bleibt seine Energie konstant. Die in Bewegung gesetzten Wasserteilchen drehen sich um die Querschnittsachse des Fadens, aber

nicht um die eigne Achse, so daß man nur von fortschreitender Bewegung zu reden braucht.

e) Das Stromteilchen $AB = l$ übt nach Figur 198 und der zugehörigen Erläuterung auf die in der Entfernung s von ihm in der Entfernung $\varrho = s \sin \alpha$ vom Faden befindliche nordmagnetische Einheit die ablenkende Kraft

$$p = \frac{2 \kappa_1 J F_2}{s^3} = \frac{\kappa_1 J_1 l \sin \alpha}{s^2}$$

aus, wo F_2 die vom Teilchen und dem Stromelemente l gebildete Dreiecksfläche ist. Setzt man auch hier $\frac{J}{\pi}$ an Stelle von $2 \kappa_1 J_1$, so gilt analog:

Jedes Teilchen des Wirbelfadens vom Volumen ql und der Wirbelgeschwindigkeit κ , also von der Intensität $q\kappa = J$, giebt jedem Wasserteilchen, welches von ihm die Entfernung s , von der Drehachse die Entfernung $\varrho = s \sin \alpha$ hat, die Geschwindigkeit

$$v = \frac{Jl \sin \alpha}{\pi s^2} = \frac{q\kappa l \sin \alpha}{\pi s^2} = \frac{q\kappa F}{\pi s^3},$$

wo F dieselbe Bedeutung, wie vorher hat. Das Drehungsbestreben führt also nach Erreichung des stationären Zustandes zu einer Geschwindigkeit, die direkt proportional dem Ausdrucke $q\kappa l \sin \alpha$ und umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstands s ist.

Genauere Vorstellungen von einem Wirbelfaden werden sich aus dem Folgenden ergeben.

280) Zwei und mehrere Elementarfäden.

a) Befinden sich im Wasserraum zwei oder mehrere Wirbelfäden von gleichen Intensitäten und übereinstimmendem Drehungssinn, so ist A bestrebt dem Wirbel B und seiner Umgebung die fortschreitende Geschwindigkeit $v_b = \frac{J}{\pi \varrho}$ zu geben. B wirkt in demselben Sinne auf A ein. Es resultiert für beide Wirbelfäden eine Drehung um den Halbierungspunkt S der Strecke AB . Denkt man sich die Intensitäten der Wirbel A und B dort als Massen angebracht, so ist S der Schwerpunkt. Beide Wirbel wirken auf die Gerade AB so drehend ein, als ob jeder ein Kräftepaar wäre. (Vgl. das Aufsetzen zweier Kreisel in die Vertiefungen A und B eines

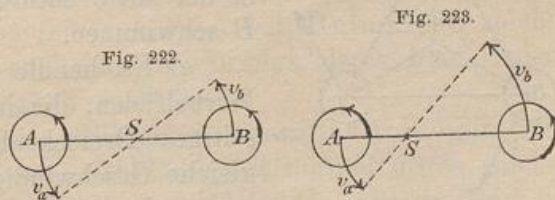


Fig. 222.

Fig. 223.