Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

280) Zwei und mehrere Elementarfäden

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

nicht um die eigne Achse, so dafs man nur von fortschreitender Bewegung zu reden braucht.

e) Das Stromteilchen $AB = l$ übt nach Figur 198 und der zugehörigen Erläuterung auf die in der Entfernung s von ihm in der Entfernung $\varrho = s \sin \alpha$ vom Faden befindliche nordmagnetische Einheit die ablenkende Kraft

$$p = \frac{2\varkappa_1 J F_2}{s^3} = \frac{\varkappa_1 J_1 l \sin \alpha}{s^2}$$

aus, wo F_2 die vom Teilchen und dem Stromelemente l gebildete Dreiecksfläche ist. Setzt man auch hier $\frac{J}{\pi}$ an Stelle von $2\varkappa_1 J_1$, so gilt analog:

Jedes Teilchen des Wirbelfadens vom Volumen ql und der Wirbelgeschwindigkeit $\varkappa$, also von der Intensität $q\varkappa = J$, giebt jedem Wasserteilchen, welches von ihm die Entfernung s, von der Drehachse die Entfernung $\varrho = s \sin \alpha$ hat, die Geschwindigkeit

$$v = \frac{Jl \sin \alpha}{\pi s^2} = \frac{q\varkappa l \sin \alpha}{\pi s^2} = \frac{q\varkappa F}{\pi s^3},$$

wo F dieselbe Bedeutung, wie vorher hat. Das Drehungsbestreben führt also nach Erreichung des stationären Zustandes zu einer Geschwindigkeit, die direkt proportional dem Ausdrucke $q\varkappa l \sin \alpha$ und umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstands s ist.

Genauere Vorstellungen von einem Wirbelfaden werden sich aus dem Folgenden ergeben.

280) Zwei und mehrere Elementarfäden.

a) Befinden sich im Wasserraum zwei oder mehrere Wirbelfäden von gleichen Intensitäten und übereinstimmendem Drehungssinn, so ist A bestrebt dem Wirbel B und seiner Umgebung die fortschreitende Geschwindigkeit $v_b = \frac{J}{\pi \varrho}$ zu geben. B wirkt in demselben Sinne auf A ein. Es resultiert für beide Wirbelfäden eine Drehung um den Halbierungspunkt S der Strecke AB. Denkt man sich die Intensitäten der Wirbel A und B dort als Massen angebracht, so ist S der Schwerpunkt. Beide Wirbel wirken auf die Gerade AB so drehend ein, als ob jeder ein Kräftepaar wäre. (Vgl. das Aufsetzen zweier Kreisel in die Vertiefungen A und B eines

Fig. 222.

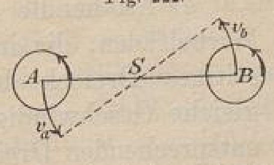
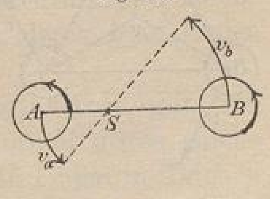


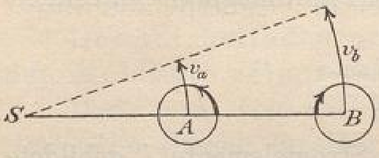
Fig. 223.



um S drehbaren Balkens, wobei eine Drehung des letzteren entsteht. Schmidtsche Kreisel-Versuche.)

b) Verhalten sich die Intensitäten der beiden Wirbel wie $2:1$, so teilt der Drehungspunkt S die Linie ebenso, wie die Massen 2 und 1 in A bezw. B, denn $\frac{J_a}{\pi\varrho} : \frac{J_b}{\pi\varrho} = 2:1$. (Fig. 223.)

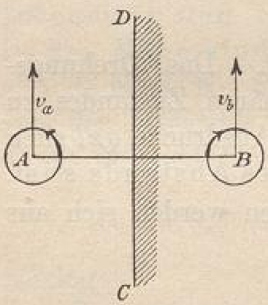
Fig. 224.



c) Drehen die Wirbel entgegengesetzt, so ist es ähnlich, wie bei entgegengesetzten Kräften (bezw. Massen). Der Schwerpunkt fällt aufserhalb. Auch jetzt ist er das Centrum der Drehbewegung. (Fig. 224.)

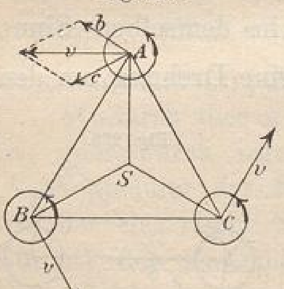
d) Sind dabei die Intensitäten absolut genommen einander gleich, so fällt S in unendliche Entfernung, wie bei einem Kräftepaar, beide Wirbel wandern mit der Geschwindigkeit $\frac{J}{\pi\varrho}$ in derselben Richtung vorwärts. In diesem Falle ist B das Spiegelbild von A. Man kann die Mittellinie CD als feste Wand betrachten und B entfernen, ohne dafs sich für A etwas ändert. A wandert in der Nähe einer festen Wand parallel derselben vorwärts mit der Geschwindigkeit $\frac{J}{\pi\varrho}$. Es verhält sich wie ein Schwimmer, der mit der linken Hand richtig rudert, mit der Rechten aber eine Gegenbewegung macht. In der That wird links von A alles Wasser zurückgetrieben, rechts von A eine weit kleinere Wassermenge vorwärts getrieben. Durch die Differenz der Gegenwirkungen beider Aktionen entsteht die Geschwindigkeit von A.

Fig. 225.



Ähnlich ist es, wenn A und B (ohne die Wand) aufeinander wirken. A rudert richtig mit der linken, B mit der rechten Hand, jeder falsch mit der anderen Hand. Das Wasser aufserhalb AB wird rückwärts, das zwischen AB vorwärts getrieben, in der Mitte naturgemäfs schneller, als A und B schwimmen.

Fig. 226.



e) Es handle sich um drei gleichwertige Wirbelfäden, die in der Zeichnung ein gleichseitiges Dreieck bilden. Jeder erhält zwei gleiche Geschwindigkeiten senkrecht gegen die entsprechenden Dreiecksseiten, deren Resultante senkrecht zur Mittellinie steht. So entsteht Drehungsbewegung um den Mittelpunkt S des Dreiecks ohne sonstige Änderungen.

f) Ebenso ist es bei jeder Anordnung nach den Ecken eines regelmäfsigen Polygons, ebenso bei homogener Ausfüllung einer Kreisfläche mit gleichwertigen Wirbeln. Stets entsteht Drehung um den Mittelpunkt.

g) Sind drei gleichwertige Wirbel allgemein gelagert und bildet man die Resultanten, so stehen diese im allgemeinen nicht mehr senkrecht auf den Schwerpunktstransversalen, der Schwerpunkt ruht bei der Bewegung, aber die Gestalt des Dreiecks macht periodische Änderungen durch, da die einzelnen Wirbel sich bald von S entfernen, bald in gröfsere Nähe gelangen. (Figur für $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $m_3 = -1$ siehe bei Gröbli, Seite 22.) Die Untersuchung des Gestaltenwechsels ist elementar nicht durchzuführen. Ebenso treten Wandelungen der Gestalt ein, wenn die Wirbel eine Ellipsenfläche gleichmäfsig erfüllen, worüber man Kirchhoffs Mechanik vergleiche.

Stets aber ruht der Schwerpunkt des Komplexes von Wirbeln.

Diesen Schwerpunkt findet man, wenn man jeden Wirbel durch eine seiner Intensität entsprechende Masse ersetzt.

Das Ruhen des Schwerpunktes gilt nicht nur von den Wirbelcylindern, die aus Wirbelfäden bestehen, sondern auch von den aus Wirbellinien bestehenden Wirbelfäden, sobald man sich im Normalschnitt die Punkte der Wirbellinien mit Massen belegt denkt, die ihren Umdrehungsgeschwindigkeiten proportional sind.

Damit ist die genauere Vorstellung des Wirbelfadens geschaffen, die oben unverständlich geblieben sein würde. Auch erkennt man jetzt, warum oben von Strombewegungen und fortschreitenden Bewegungen der Wirbelfäden gesprochen wurde.

Von den krummlinigen Wirbelfäden sollen nur unendlich dünn zu denkende kreisförmige Wirbelringe behandelt werden, die aus den unten anzugebenden Gründen von hervorragendster Wichtigkeit für die neueren physikalischen Theorien geworden sind. Sämtliche Wirbellinien eines solchen Ringes sind als kreisförmig aufzufassen. Jeder Raucher kann bekanntlich solche Ringe sichtbar hervorbringen. Bei ruhigem Wetter bildet der auspuffende Dampf einer stillstehenden Lokomotive oder eines Dampfrohrs bisweilen sehr schöne Wirbelringe. Mit Hilfe einer Kreisscheibe (eines Löffels) hat Helmholtz solche im Wasser hervorgebracht, auch halbkreisförmige, deren freie Enden an der Oberfläche der Flüssigkeit ausliefen.

Was oben über geradlinige Wirbelfäden gesagt wurde, gilt, beiläufig bemerkt, auch dann, wenn die Flüssigkeit normal gegen solche durch Ebenen begrenzt ist, also z. B. für senkrechte Fäden in Teichen von überall gleicher Tiefe. Es handelt sich eben dann um zweidimensionale Probleme.