Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

c) Forchheimersche Theorie der Grundwasserbewegung in der Umgebung von Brunnen und Sickerschlitzen

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

c) Forchheimers Theorie der Grundwasserbewegung in der Umgebung von Brunnen und Sickerschlitzen.

285) Die Grundhypothese. Die Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover enthielt im 7. Hefte des Jahrgangs 1886 eine Abhandlung des Prof. Dr. Forchheimer über die Ergiebigkeit von Brunnenanlagen und Sickerschlitzen, die eine interessante Anwendung der besprochenen Isothermenscharen darbietet. Die Berechnungen schlossen sich nach eigner Angabe des Verfassers an unsere Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften an.

Die zu Grunde gelegte einfache Hypothese kann folgendermaſsen formuliert werden:

Die Geschwindigkeit einer stationären Strömung des Grundwassers ist proportional dem Gefällverhältnis seiner Oberfläche, im übrigen aber unabhängig von der Tiefe.

Gegen diese Annahme lassen sich zwar Bedenken erheben, aber als Annäherungsannahme darf man sie innerhalb gewisser Grenzen gelten lassen, da die Resultate durchaus nicht widerspruchsvoll erscheinen und einfach und faſslich auszusprechen sind. Andere Theorien haben entsprechendes noch nicht geleistet. Daher soll der Versuch gemacht werden, eine elementare Einführung auch in dieses interessante Gebiet zu geben, bei der ein einfacherer Gang, als der von Forchheimer gewählte, eingeschlagen werden soll.

Um für die Sache zu interessieren, schicken wir das Resultat voraus:

Die Projektion der Niveau- und Stromlinien der Grundwasserstände giebt ein isothermisches Netz. Ist $z = f(xy) + c$ die Potentialfläche für eine Wärme- oder Elektrizitätsströmung, so ist $z^2 = f(xy) + c$ oder $z = \sqrt{f(xy) + c}$ die Gleichung für die Oberfläche des Grundwassers bei der entsprechenden Strömung. Gemäſs der Proportion $1 : \sqrt{z} : \sqrt{z} : z$ hat man also nur für 1 und jede Ordinate die mittlere Proportionale zu konstruieren, um aus der einen dieser Flächen die andere abzuleiten.

286) Die Parallelströmung. Mit der einfachen Parallelströmung soll begonnen werden, und zwar an der Hand des folgenden Problems.

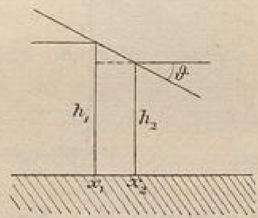
Man denke sich zwei Seen verschiedenen Wasserstandes durch einen geradlinigen, überall gleich breiten Damm voneinander getrennt, dessen Grenzflächen als senkrecht angenommen werden. In welcher Weise geschieht das Durchsickern des Wassers?

An jeder Stelle ist, der obigen Hypothese entsprechend,

$$v = -\varkappa \frac{h_2 - h_1}{x_2 - x_1} = -\varkappa \tan\vartheta, \tag{1}$$

wenn die Grundwasserströmung in der Richtung von links nach rechts vor sich geht. Hier ist $\varkappa$ eine konstante Gröfse, die der Durchlässigkeit des Erdmaterials entspricht, ϑ ist der (negative) Neigungswinkel der Grundwasseroberfläche. Die in der Zeiteinheit durch eine senkrechte Fläche, die auch die Strömungsrichtung senkrecht schneidet, passierende Wassermenge ist also

Fig. 230.



$$Q = -by\varkappa\tan\vartheta, \tag{2}$$

wenn b die Breite des Rechtecks, y die von der undurchlässigen Schicht bis zur Oberfläche gemessene Höhe ist. Da nun der Zustand als ein stationärer betrachtet werden soll, mufs durch ein anderes Rechteck von derselben Breite b, aber anderer Höhe y_1 und anderem Winkel ϑ_1 dieselbe Menge

$$Q = -by_1\varkappa\tan\vartheta_1 \tag{2*}$$

gehen. Daraus folgt aber

$$-by\varkappa\tan\vartheta = by_1\varkappa\tan\vartheta_1$$

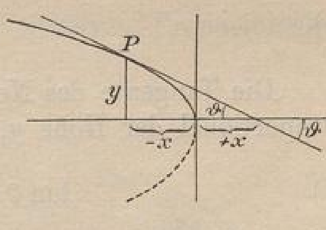
oder

$$\frac{y}{y_1} = \frac{\tan\vartheta_1}{\tan\vartheta}. \tag{3}$$

Die Einstellung des Grundwassers geschieht also stets so, dafs die Höhen umgekehrt proportional den Tangenten der Neigung seiner Oberfläche sind.

Durch die Gleichung 3) ist aber eine Parabel charakterisiert, deren Achse in der undurchlässigen Schicht liegt. Für jeden Punkt P ist nämlich bei dieser Kurve $\tan\alpha = -\frac{y}{2x}$, also ist für zwei Parabelpunkte

Fig. 231.



$$\frac{\tan\vartheta_1}{\tan\vartheta} = \frac{-\frac{y_1}{2x_1}}{-\frac{y}{2x}} = \frac{y_1}{y}\,\frac{x}{x_1}.$$

Nach bekannter Parabeleigenschaft ist zugleich $\frac{y^2}{y_1^2} = \frac{x}{x_1}$, also

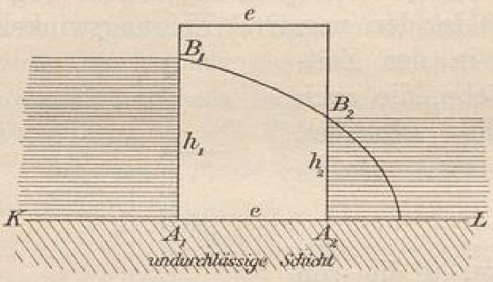
$$\frac{y}{y_1} = \frac{y_1}{y}\,\frac{x}{x_1}.$$

Da die rechten Seiten übereinstimmen, gilt dasselbe von den linken Seiten, und so folgt Gleichung 3).

Aus $\frac{y^2}{y_1^2} = \frac{x}{x_1}$ folgt $y^2 = y_1^2 \frac{x}{x_1} = 2y_1 \frac{y_1}{2x_1} x = 2y_1 \tan \alpha_1 x$, oder nach 2*)

4) $$y^2 = -\frac{2Q}{b\varkappa} x.$$

Fig. 232.



Es handelt sich also um diejenige Parabel, deren Achse in die Grenzlinie KL der undurchlässigen Schicht fällt, und die durch die Niveaupunkte B_1 und B_2 geht. Der Scheitel S ist Nullpunkt des Koordinatensystems.

Aus den besonderen Werten

$$h_1^2 = -\frac{2Q}{b\varkappa} x_1 \quad \text{und} \quad h_2^2 = -\frac{2Q}{b\varkappa} x_2$$

folgt zunächst

$$h_1^2 - h_2^2 = -\frac{2Q}{b\varkappa}(x_1 - x_2) = \frac{2Q}{b\varkappa}(x_2 - x_1) = \frac{2Q}{b\varkappa} e,$$

so daſs

5) $$Q = \frac{b\varkappa\,(h_1^2 - h_2^2)}{2e}$$

ist. Folglich:

Der Sickerverlust ist umgekehrt proportional der Dammbreite e, direkt proportional der Länge b, der Durchlaſskonstanten $\varkappa$ und der Differenz der Quadrate der Grenzhöhen h_1 und h_2.

Nach 5) läſst sich die Parabelgleichung 4) umformen in

6) $$y^2 = -\frac{h_1^2 - h_2^2}{e} x.$$

Die Tangente des Neigungswinkels für jede Stelle ist umgekehrt proportional der Höhe y, nämlich

7) $$\tan \vartheta = -\frac{Q}{b\varkappa y} = -\frac{h_1^2 - h_2^2}{2ey},$$

die Geschwindigkeit ist ebenfalls umgekehrt proportional der Höhe y, da

8) $$v = -\varkappa \tan \vartheta = \varkappa \frac{h_1^2 - h_2^2}{2ey}.$$

Die Entfernung $A_1 S$ ist nach 6)

$$x_1 = -\frac{e h_1^2}{h_1^2 - h_2^2} = -\frac{e}{1 - \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2}.$$

Den Höchstwert des Sickerverlustes erhält man für $h_2 = 0$. Er ist gleich $\frac{b \varkappa h_1^2}{2e}$. Die zugehörige Geschwindigkeit würde unendlich grofs sein, da nach 8) $y = 0$ in den Nenner treten würde.

[Dieser praktisch unmögliche Grenzfall ist der schwache Punkt der Theorie, der sich zunächst dadurch erledigt, dafs das ausströmende Wasser stets eine bestimmte endliche Höhe h_2 hat, so dafs der Grenzfall überhaupt niemals erreicht wird. Er entspricht der unendlichen Geschwindigkeit der Elektrizität bei punktförmigen Elektroden. Bedenklich aber bleibt, dafs in der Nähe von S Geschwindigkeiten stattfinden würden, welche die überhaupt mögliche Ausflufsgeschwindigkeit $v = \sqrt{2 g h_1}$ übertreffen, die der Dammbreite $e = 0$ entspricht. Es handelt sich also um eine Annäherungstheorie, die nur brauchbar sein kann, wenn $A_2 S$ nicht zu kleine Werte annimmt.]

Wichtig für unsere Zwecke ist nun folgendes: Die Gleichung

$$y = -\frac{2Q}{b\varkappa} x$$

würde eine ebene Schrägfläche geben, wie sie bei der Parallelströmung der Wärme und Elektrizität auftrat. Hier aber handelt es sich um

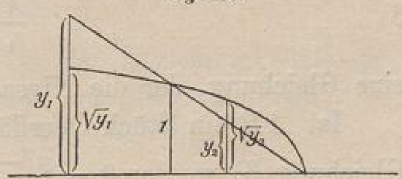
$$y = \sqrt{-\frac{2Q}{b\varkappa} x}.$$

Man kann also die zweite Fläche aus der ersten dadurch ableiten, dafs man an jeder Stelle geometrisch die Quadratwurzel der Ordinate bildet. Gemäfs der Proportion

$$1 : \sqrt{y} = \sqrt{y} : y$$

handelt es sich um die Konstruktion der mittleren Proportionalen zu 1 und y. (Fig. 233.)

Fig. 233.



Für den Fall der Parallelströmung hat sich also das vorausgesagte Resultat bestätigt.

Liegt die undurchlässige Schicht in unendlicher Tiefe, so werden die Dimensionen der Parabel unendlich grofs, d. h. es handelt sich um die gerade Linie $B_1 B_2$. Für diesen Fall stimmt also die Potentialfläche der Grundwasserströmung mit der der elektrischen Strömung nach dem Ohmschen Gesetze überein. Der Umstand, dafs Prof. Forchheimer den Fall unendlicher Tiefe an die Spitze seiner Abhandlung stellt, erschwert ihr Studium und läfst die Theorie als künstlicher erscheinen, als sie in Wirklichkeit ist.

287) Radialströmung. Das Grundwasser ströme von allen Seiten her in stationärer Weise einem Brunnen mit kontinuierlichem Betriebe zu. Um mathematische Einfachheit zu erhalten denke man sich eine etwa aus Dünensand bestehende kreisförmige, eigentlich cylindrisch begrenzte Insel im Meere und in ihrer Mitte einen bis zur horizontal gedachten undurchlässigen Schicht reichenden Brunnenschacht. Der ursprüngliche Grundwasserstand entspricht dann der Meeresoberfläche. Durch den Pumpbetrieb senkt sich der Wasserstand im Brunnen so lange, bis infolge der wachsenden Steilheit der Oberfläche des Grundwassers dessen Nachströmen stark genug geworden ist, um die Wasserentnahme auszugleichen. Von da ab bleibt seine Oberfläche konstant.

Jetzt ist nach der Theorie an jeder Stelle

$$1)\qquad v = + \varkappa \tan \vartheta,$$

denn $\tan\vartheta$ ist der Senkung wegen für jeden Radius negativ, aber auch v ist negativ, weil die Strömung dem zunehmenden Radius entgegengerichtet ist.

Die in der Zeiteinheit jeden der koncentrischen Cylinder durchströmende Wassermasse ist also

$$2)\qquad Q = 2\, r\pi y \varkappa \tan\vartheta,$$

wo r den Radius, y die Höhe des Cylinders, von der Grundschicht aus gemessen, bedeutet. Für einen bestimmten Cylinder sei

$$2^*)\qquad Q = 2\, r_1 \pi y_1 \varkappa \tan\vartheta_1.$$

Aus der Gleichsetzung der linken Seiten folgt

$$r y \tan\vartheta = r_1 y_1 \tan\vartheta_1,$$

also ist

$$3)\qquad \frac{r y}{r_1 y_1} = \frac{\tan\vartheta_1}{\tan\vartheta},$$

eine Gleichung, der die Niveaufläche genügen mufs.

Ist AB ein Stück Oberfläche, jetzt steigend gedacht, so ist nach Gleichung 3) wo $\tan\vartheta = \frac{y''-y'}{r''-r'}$ zu setzen ist

$$3^*)\qquad y(y''-y') = r_1 y_1 \tan\vartheta_1 \frac{r''-r'}{r} = \frac{c_1}{r}(r''-r').$$

Die linke Seite kann aufgefaſst werden als Schicht eines Dreiecks, welches in jeder Höhe y den Querschnitt y hat, dessen Inhalt von irgend einer Höhe y_1 bis zu einer andern y von der Gröſse $\frac{y^2}{2} - \frac{y_1^2}{2}$ ist. Den Ausdruck rechts kann man auffassen als Horizontalstreifen einer Fläche, die in jeder Höhe r den Querschnitt $\frac{c_1}{r}$ hat, d. h. einer gleichseitigen Hyperbel, die bekanntlich von der Höhe 1 bis zur Höhe r gemessen den Inhalt $c_1 \overset{e}{\lg} r - c_1 \overset{e}{\lg} 1 = c_1 \overset{e}{\lg} r$ hat. Nun stimmen nach 3*) je zwei zusammengehörige Streifen beider Flächen überein, rechnet man also die letztere von 1 bis r, die erstere vom zugehörigen y_1 bis zum zugehörigen y, so muſs die Summe der Schichten der einen gleich der entsprechenden Summe der andern sein, d. h. es muſs werden

Fig. 234.

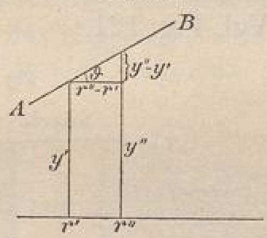
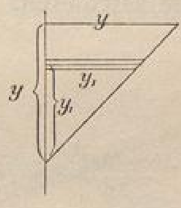


Fig. 235.



$$\frac{y^2}{2} - \frac{y_1^2}{2} = c_1 \lg r = r_1 y_1 \tan \vartheta_1 \lg r$$

oder

$$y^2 = 2 r_1 y_1 \tan \vartheta_1 \lg r + y_1^2.$$

Dieser Gleichung müssen also auch die Koordinaten der Kurven des Grundwasserstandes genügen.

Die Gleichung läſst sich unter Berücksichtigung von 2*) auch schreiben

4) $$y^2 = \frac{Q}{\pi \varkappa} \lg r + y_1^2$$

oder auch

4*) $$y = \sqrt{\frac{Q}{\pi \varkappa} \lg r + y_1^2}.$$

Nun steht aber diese Gleichung zur Gleichung

5) $$y = \frac{Q}{\pi \varkappa} \lg r + y_1^2,$$

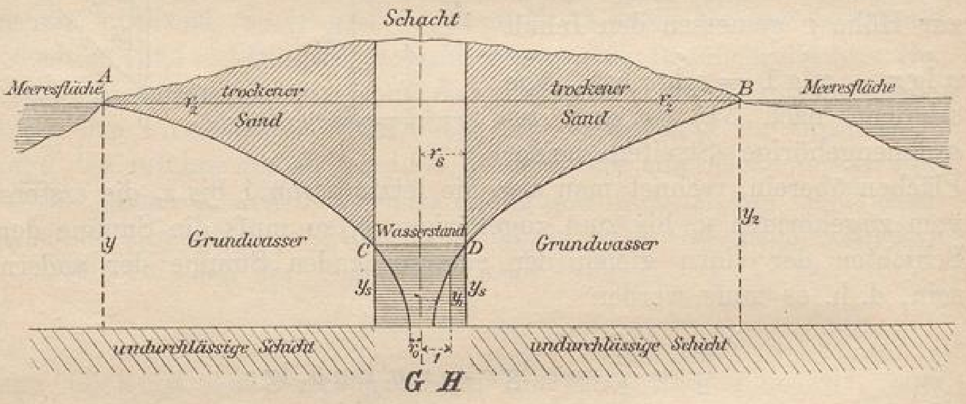
die eine logarithmische Linie darstellt, in der Beziehung, daſs die Ordinaten der Kurve 4*) die Quadratwurzeln aus denen der Kurve 5) sind, d. h. daſs jede Ordinate von 4*) gemäſs der Proportion

$$1 : \sqrt{y_1} = \sqrt{y_1} : y_1$$

als mittlere Proportionale zur Strecke 1 und zur Ordinate y_1 konstruiert werden kann. Dies entspricht der im Anfang gegebenen Voraussagung.

Die durch 5) dargestellte Potentialfläche entspricht dem Falle der Ausströmung der Elektrizität aus einem Punkte der unbegrenzten Platte, der die Elektrizität auf einem sehr groſsen Kreise zugeleitet wurde. Bei 4) handelt es sich um die entsprechende Wasserstandsfläche, deren Ordinaten durch Wurzelausziehung gefunden werden. Wie man die logarithmische Potentialfläche elementar konstruieren kann, so kann man auch die Niveaufläche für radiale Grundwasserströmung elementar konstruieren. Vgl. Fig. 121.

Fig. 236.



Die Zeichnung stellt den Vorgang schematisch dar. $AB = 2r_2$ ist der Durchmesser der Insel und zugleich die Linie des ursprünglichen Grundwasserstandes. HDB ist eine der durch Gleichung 4) dargestellten Kurven.

Ist r_s der Radius des Schachtes und y_s die zu r_s gehörige Ordinate der Kurve, y_2 die zu r_2 gehörige, so folgt nach 4) für diese Stellen

$$y_2^2 = \frac{Q}{\pi\varkappa} \lg r_2 + y_1^2,$$

$$y_s^2 = \frac{Q}{\pi\varkappa} \lg r_s + y_1^2,$$

also durch beiderseitige Subtraktion

$$6) \qquad y_2^2 - y_s^2 = \frac{Q}{\pi\varkappa}(\lg r_2 - \lg r_s) = \frac{Q}{\pi\varkappa} \lg\left(\frac{r_2}{r_s}\right).$$

Die dem Wasserstande y_s des Brunnens zugehörige Wasserentnahme Q, d. h. seine Ergiebigkeit für diese Einstellung, ist

$$7) \qquad Q = \frac{\pi\varkappa(y_2^2 - y_s^2)}{\lg r_2 - \lg r_s} = \frac{\pi\varkappa(y_2^2 - y_s^2)}{\lg\left(\frac{r_2}{r_s}\right)}.$$

Die Ergiebigkeit bei stationärem Betriebe ist also umgekehrt proportional dem Logarithmus des Radienverhältnisses $\frac{r_2}{r_s}$ und direkt proportional der Durchläfsigkeitskonstante $\varkappa$ und der Quadratdifferenz der Grenzhöhen, d. h. dem Ausdrucke $\left(y_2^2 - y_s^2\right)$.

Die Analogie mit den Formeln für die Parallelströmung fällt sofort in die Augen. Nach 6), wo für y_2 das allgemeine y zu setzen ist, läfst sich die Gleichung der Niveaufläche auch schreiben

8) $$y^2 - y_s^2 = \frac{Q}{\pi \varkappa} (\lg r - \lg r_s),$$

oder, indem man den Wert von Q aus 7) einsetzt:

9) $$\frac{y^2 - y_s^2}{y_2^2 - y_s^2} = \frac{\lg r - \lg r_s}{\lg r_2 - \lg r_s} = \frac{\lg \frac{r_2}{r_s}}{\lg \frac{r}{r_s}}.$$

Damit ist eine rein geometrische Gleichung gefunden, die nur von gemessenen Längen abhängig ist.

Wäre z. B. $r_2 = 1000$ m, $r_s = 1$ m, $y_2 = 30$ m, $y_s = 20$ m, so würde die Gleichung der Niveaufläche lauten

$$\frac{y^2 - 20^2}{30^2 - 20^2} = \frac{{}^{e}\lg \frac{r}{1}}{{}^{e}\lg \frac{1000}{1}} = \frac{{}^{e}\lg r}{{}^{e}\lg 1000} = \frac{\frac{1}{m}\,{}^{10}\lg r}{\frac{1}{m}\,{}^{10}\lg 1000} = \frac{{}^{10}\lg r}{{}^{10}\lg 1000} = \frac{{}^{10}\lg r}{3},$$

oder

$$y = \sqrt{\tfrac{500}{3}\,{}^{10}\lg r + 400}.$$

Die Kurve trifft die Grundfläche an der Stelle, wo $\frac{500}{3}\,{}^{10}\lg r = -400$ ist, also $\lg r = -\frac{1200}{500} = -2{,}4$ oder $\lg \frac{1}{r} = 2{,}4$, d. h. $\frac{1}{r} = 251$, so dafs die Entfernung von der Schachtachse gleich $\frac{1}{251}$ m ist.

Jede Niveaukurve setzt sich auf die Grundschicht senkrecht auf, denn nach Gleichung 3) ist $\tan \vartheta = \frac{r_1 y_1 \vartheta_1}{r y}$, was für $y = 0$ unendlich wird und $\vartheta = 90^0$ macht.

Zum obigen ganz willkürlichen Beispiele gehört nach 7) die Ergiebigkeit

$$Q = \frac{\pi \varkappa (30^2 - 20^2)}{{}^{e}\lg \frac{1000}{1}} = \frac{500\, \pi \varkappa}{\frac{1}{m}\,{}^{10}\lg 1000} = \frac{500\, \pi \varkappa m}{{}^{10}\lg 1000} = \frac{500}{3}\, 0{,}434 \cdot \pi \varkappa = \sim 227\, \varkappa.$$

Wäre z. B. $\varkappa = \frac{1}{200}$, so würde die Ergiebigkeit für jede Sekunde gleich 1,135 cbm sein. Kennt man umgekehrt durch Pumpversuche $\varkappa = 1$ cbm, so würde $\varkappa = \frac{1}{227}$ sein, und zwar für den entsprechenden Dünensand, für den nun alle Aufgaben leicht zu lösen sein werden, z. B. auch für die Parallelströmung.

Wäre z. B. ein Bassin zur Ebbezeit mit seiner Wasseroberfläche 10 m über der undurchlässigen Schicht, die Meeresoberfläche selbst 9 m und würde die Trennung, rein schematisch gedacht, durch einen Damm von Dünensand in der Breite von 20 m herbeigeführt, so würde der Sickerverlust nach den obigen Formeln für das laufende Meter der Dammlänge sein

$$Q = \frac{b\varkappa\left(h_1^2 - h_2^2\right)}{2e} = 1 \cdot \frac{1}{227}\left(10^2 - 9^2\right) \cdot \frac{1}{2 \cdot 20} = \frac{19}{9080} \text{ cbm} = \sim 2 \text{ Liter}$$

auf die Sekunde.

Dabei ist jedoch das unmögliche Schema der Figur angenommen, denn der Dünensand wird sich nicht mit senkrechten Wänden einstellen. Auch der Wert von $\varkappa$ ist hier ganz willkürlich im Anschlufs an das obige Beispiel angenommen.

Rückt die Wand des Schachtes allzunahe an die Stelle heran, wo die Kurve sich auf die Grundfläche aufsetzt, so werden aus denselben Gründen, wie bei der Parallelströmung, die Formeln unbrauchbar.

288) **Bemerkung.** Es fragt sich, ob, wie bei der Parallelströmung, für unendliche Tiefe der Grundschicht der Unterschied zwischen der jetzt behandelten Niveaufläche und den früheren Potentialflächen aufhört. Zu diesem Zwecke schreibe man Gleichung 8) in der Form

$$(y + y_s)(y - y_s) = \frac{Q}{\pi\varkappa}(\lg r - \lg r_s)$$

oder

$$y - y_s = \frac{Q}{\pi\varkappa(y + y_s)}(\lg r - \lg r_s).$$

Ist nun y und auch y_s sehr grofs, so kann man statt $y + y_s$ schreiben $2y_s$, denn der endliche Unterschied darf gegen $2y_s$ vernachlässigt werden. Dies verwandelt die Gleichung in

$$y - y_s = \frac{Q}{2\pi\varkappa y_s}(\lg r - \lg r_s).$$

Dies aber ist die Gleichung einer gewöhnlichen logarithmischen Linie. Die Niveaufläche für sehr grofse Tiefen stimmt also überein mit einer gewissen Potentialfläche für elektrische Strömung.

289) **Folgerungen.** Aus den Gleichungen lassen sich gewisse Proportionen ablesen. Bildet man z. B. Gleichung 7) für zwei Fälle,

die sich nur bezüglich der Verhältnisse $\frac{r_2}{r_s} = q$ und $\frac{r_2'}{r_s'} = q'$ unterscheiden, so erhält man durch Division für die Ergiebigkeiten das Verhältnis

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{\lg\left(\frac{r_2}{r_s}\right)}{\lg\left(\frac{r_2'}{r_s'}\right)} = \frac{\lg q'}{\lg q}.$$

Setzt man $q = e^n$, $q' = e^{n'}$, so folgt

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{n'}{n}.$$

Sollen sich die Ergiebigkeiten wie $1:2$ verhalten, so mufs $q = e^n$, $q' = e^{2n}$, also $q' = q^2$ sein, sollen sich die Ergiebigkeiten wie $1:n$ verhalten, so mufs $q' = q^n$ sein.

Projiziert man bei einer solchen Niveaufläche die zu den Höhen

$$\sqrt{c},\quad \sqrt{2c},\quad \sqrt{3c},\quad \sqrt{4c}, \ldots$$

gehörigen Niveaulinien auf die Grundfläche, so entstehen koncentrische Kreise, deren Radien in geometrischer Reihe aufeinander folgen, z. B. nach der Reihe

$$e^{c_1},\quad e^{2c_1},\quad e^{3c_1},\quad e^{4c_1}, \ldots$$

Dies folgt daraus, dafs bei der entsprechenden Potentialfläche für elektrische Strömung die zu diesen Kreisen gehörigen Ordinaten nach dem Gesetz

$$c,\quad 2c,\quad 3c,\quad 4c, \ldots$$

aufeinander folgen, für die Niveaufläche aber die Wurzeln auszuziehen sind.

Befindet sich der Brunnenschacht im Binnenlande auf ausgedehnter Grundwasser führender Ebene, so kann man die obigen Resultate mit um so gröfserer Annäherung als richtig benutzen, je ausgedehnter die Ebene bei homogenem Materiale ist. Allerdings liefse sich einwenden, dafs, je länger der Pumpbetrieb dauert, der Radius r_2, der dann Schnitte der Niveaukurve durch die Grundwasserebene giebt, gröfser und gröfser werden müsse. Dies ändert aber für die nähere Umgebung des Brunnens schliefslich doch nichts.

290) **Beispiele.**

a) Nachdem der Zusammenhang mit dem logarithmischen Potential einmal klar gelegt ist, lassen sich zahlreiche Resultate ohne weiteres aussprechen.

Liegt der Brunnenschacht auf kreisförmiger Insel excentrisch, so bilde man zu dem betreffenden Punkte P den reciproken Q und lege durch P und Q ein Kreisbüschel nebst zugeordneter Kreisschar. Vgl. Fig. 127. Die Kreise des Büschels sind Stromlinien, die Kreise der Schar sind Niveaulinien des Grundwassers. An Stelle der Gleichung 4*) tritt

$$y^2 = \frac{Q}{\pi\varkappa} \lg \frac{r_1}{r_2} + y_1^2$$

oder

$$y = \sqrt{\frac{Q}{\pi\varkappa}(\lg r_1 - \lg r_2) + y_1^2}\,.$$

Befindet sich der Brunnen in der Umgebung einer geradlinigen Küste, so hat man zu P nur das Spiegelbild zu bilden und wie vorher zu verfahren.

b) Handelt es sich um zwei Brunnenschachte auf unbegrenzter Ebene, deren Betrieb ein gleichartiger ist, so wird Fig. 125 mafsgebend, d. h. die Stromlinien sind ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln, die Niveaulinien konfokale Lemniskaten 2ter Ordnung. An Stelle von Gleichung 4) tritt

$$y^2 = \frac{Q}{\varkappa\pi} \lg (r_1 r_2) + y_1^2$$

oder

$$y = \sqrt{\frac{Q}{\pi\varkappa}(\lg r_1 + \lg r_2) + y_1^2}\,.$$

Sind die Ergiebigkeiten der Brunnen verschieden, verhalten sie sich z. B. wie $\nu_1 : \nu_2$, so handelt es sich um die Niveaukurven und Niveauflächen

$$y = \sqrt{\frac{Q}{\pi\varkappa}(\lg r_1^{\nu_1} + \lg r^{\nu_2}) + y_1^2}$$

oder

$$y = \sqrt{\frac{Q}{\pi\varkappa}(\nu_1 \lg r_1 + \nu_2 \lg r_2) + y_1^2} = \sqrt{\frac{Q}{\pi\varkappa} \lg (r_1^{\nu_1} r_2^{\nu_2}) + y_1^2}\,.$$

Ebenso wird bei n Brunnen von der Ergiebigkeit $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n$ die Gleichung

$$y = \sqrt{\frac{Q}{\pi\varkappa}(\nu_1 \lg r_1 + \nu_2 \lg r_2 + \nu_3 \lg r_3 + \ldots + \nu_1 \lg r_n) + y_1^2}$$

oder

$$y^2 - y_1^2 = \frac{Q}{\varkappa\pi} \sum \nu_1 \lg r.$$

Dem Leser bleibe es überlassen, weitere Übungsbeispiele zu bilden.

Geschieht z. B. das Auspumpen mit Hilfe eines Sickerschlitzes, so wird Fig. 140 in Kraft treten, bei der es sich um konfokale Ellipsen und Hyperbeln handelt. Die Gleichung geht über in

$$y^2 - y_1^2 = \frac{Q}{2\pi} \lg \left[\frac{p+q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - 1} \right],$$

wenn die Länge des Schlitzes gleich 1 gesetzt wird.

Durch Abbildungen wie $Z = \sqrt{2}$ kann man zu andern Formen der Sickerschlitze übergehen.

In allen Fällen erhält man Gleichungen von der Form

$$y^2 - y_1^2 = c \cdot V,$$

wo V das entsprechende logarithmische Potential ist.

Da aber dies nur noch den Wert von Übungsbeispielen hat, soll von weiterem abgesehen werden. Man versuche, andere Zeichnungen dieses Werkes oder der „Isogonalen Verwandtschaften“ entsprechend zu deuten.

291) Schlufswort. Der Leser hat in dem Vorgetragenen eine Reihe von Eigenschaften des Potentials und ziemlich viele Anwendungen dieser Funktion auf die Gebiete der Gravitation, der Elektrostatik und des Magnetismus, des Elektromagnetismus und der Elektrodynamik, auf die Lehre von den stationären Strömungen der Wärme, der Elektrizität und idealen inkompressiblen Flüssigkeiten, auf die Lehre von den freien Ausflufsstrahlen, von den Wirbelbewegungen und den Bewegungen des Grundwassers kennen gelernt. Der Zusammenhang mit den Faradayschen Kraftlinien führte zu den Faraday-Maxwellschen Anschauungen, zur Vorstellung der Wirbelfelder und zu den Hertzschen Schwingungen über. Auch über die Elastizitätslehre, über die Kapillartheorie und über die Lehre von den Hodographen hätten elementare Betrachtungen herangezogen werden können. Je weiter man aber eindringt, um so mehr macht sich das Bedürfnis geltend, mit den Waffen der höheren Analysis zu arbeiten. Die analytische Behandlung der Potentialtheorie wird jedoch jedem Leser erleichtert sein, der hier bereits einen ersten vorläufigen Einblick in diese Lehre erhalten hat.

Bezüglich der Gravitation findet man noch einiges Elementare in Schells „Theorie der Bewegung und der Kräfte“, wo mehrere Probleme über die Anziehung homogener Linien, Flächen und einfach gestalteter Körper geometrisch bezw. mit Hilfsmitteln der gewöhnlichen Arithmetik behandelt sind. Namentlich bei Schalen, die durch ähnliche Ellipsoide begrenzt sind, kann die höhere Analysis entbehrt werden, wie schon Newton gezeigt hat. Vgl. die Zusätze.

In Schellbachs „Neuen Elementen der Mechanik" findet man ebenfalls einige elementar behandelte Probleme aus der Lehre von der Gravitation, die hier absichtlich übergangen wurden, insbesondere die Lösung der Aufgabe, die Gestalt des Körpers gröfster Attraktion zu bestimmen.

Vorgeschrittene Leser mögen auf die Originalabhandlungen von Gaufs, auf die von Grube herausgegebenen Vorlesungen Dirichlets über die Kräfte, die umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung wirken, auf die Schrift von Clausius über das Potential und die Potentialfunktion und auf folgende Werke Neumanns verwiesen werden, die, wie das früher citierte, sämtlich bei Teubner erschienen sind: „Beiträge zur mathematischen Physik", „Hydrodynamische Untersuchungen nebst Anhang über Elektrostatik und magnetische Induktion", „Untersuchungen über das logarithmische Potential". Endlich seien noch das Werk von Beer über die Elektrizitätslehre und Kirchhoffs Vorlesungen über mathematische Physik, auch die entsprechenden Vorlesungen des älteren Neumann genannt. Bezüglich der elektromagnetischen Theorie des Lichtes sei auf die Helmholtzschen Vorlesungen, herausgegeben von König und Runge (Hamburg und Leipzig bei Voss) und auf das entsprechende Werk von Tumlirz (bei B. G. Teubner erschienen) verwiesen. Auch der bald erscheinende 4. Band von Wüllners Experimentalphysik wird das Nötigste darüber enthalten. Auf Poincaré war bereits im Texte hingewiesen.

Mit diesen Andeutungen sei unsere elementare Einführung in die Theorie des Potentials und seiner wichtigsten Anwendungen beschlossen.
