Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

286) Die Parallelströmung

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

c) Forchheimers Theorie der Grundwasserbewegung in der Umgebung von Brunnen und Sickerschlitzen.

285) Die Grundhypothese. Die Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover enthielt im 7. Hefte des Jahrgangs 1886 eine Abhandlung des Prof. Dr. Forchheimer über die Ergiebigkeit von Brunnenanlagen und Sickerschlitzen, die eine interessante Anwendung der besprochenen Isothermenscharen darbietet. Die Berechnungen schlossen sich nach eigner Angabe des Verfassers an unsere Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften an.

Die zu Grunde gelegte einfache Hypothese kann folgendermafsen formuliert werden:

Die Geschwindigkeit einer stationären Strömung des Grundwassers ist proportional dem Gefällverhältnis seiner Oberfläche, im übrigen aber unabhängig von der Tiefe.

Gegen diese Annahme lassen sich zwar Bedenken erheben, aber als Annäherungsannahme darf man sie innerhalb gewisser Grenzen gelten lassen, da die Resultate durchaus nicht widerspruchsvoll erscheinen und einfach und fafslich auszusprechen sind. Andere Theorien haben entsprechendes noch nicht geleistet. Daher soll der Versuch gemacht werden, eine elementare Einführung auch in dieses interessante Gebiet zu geben, bei der ein einfacherer Gang, als der von Forchheimer gewählte, eingeschlagen werden soll.

Um für die Sache zu interessieren, schicken wir das Resultat voraus:

Die Projektion der Niveau- und Stromlinien der Grundwasserstände giebt ein isothermisches Netz. Ist $z = f(xy) + c$ die Potentialfläche für eine Wärme- oder Elektrizitätsströmung, so ist $z^2 = f(xy) + c$ oder $z = \sqrt{f(xy) + c}$ die Gleichung für die Oberfläche des Grundwassers bei der entsprechenden Strömung. Gemäfs der Proportion $1 : \sqrt{z} : \sqrt{z} : z$ hat man also nur für 1 und jede Ordinate die mittlere Proportionale zu konstruieren, um aus der einen dieser Flächen die andere abzuleiten.

286) Die Parallelströmung. Mit der einfachen Parallelströmung soll begonnen werden, und zwar an der Hand des folgenden Problems.

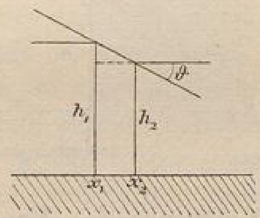
Man denke sich zwei Seen verschiedenen Wasserstandes durch einen geradlinigen, überall gleich breiten Damm voneinander getrennt, dessen Grenzflächen als senkrecht angenommen werden. In welcher Weise geschieht das Durchsickern des Wassers?

An jeder Stelle ist, der obigen Hypothese entsprechend,

$$1) \qquad v = -\varkappa \frac{h_2 - h_1}{x_2 - x_1} = -\varkappa \tan \vartheta,$$

wenn die Grundwasserströmung in der Richtung von links nach rechts vor sich geht. Hier ist $\varkappa$ eine konstante Gröfse, die der Durchlässigkeit des Erdmaterials entspricht, ϑ ist der (negative) Neigungswinkel der Grundwasseroberfläche. Die in der Zeiteinheit durch eine senkrechte Fläche, die auch die Strömungsrichtung senkrecht schneidet, passierende Wassermenge ist also

Fig. 230.



$$2) \qquad Q = -by\varkappa \tan \vartheta,$$

wenn b die Breite des Rechtecks, y die von der undurchlässigen Schicht bis zur Oberfläche gemessene Höhe ist. Da nun der Zustand als ein stationärer betrachtet werden soll, mufs durch ein anderes Rechteck von derselben Breite b, aber anderer Höhe y_1 und anderem Winkel ϑ_1 dieselbe Menge

$$2^*) \qquad Q = -by_1\varkappa \tan \vartheta_1$$

gehen. Daraus folgt aber

$$-by\varkappa \tan \vartheta = by_1\varkappa \tan \vartheta_1$$

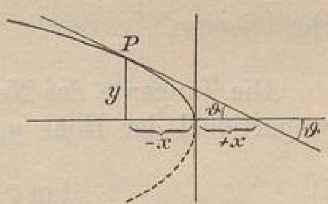
oder

$$3) \qquad \frac{y}{y_1} = \frac{\tan \vartheta_1}{\tan \vartheta}.$$

Die Einstellung des Grundwassers geschieht also stets so, dafs die Höhen umgekehrt proportional den Tangenten der Neigung seiner Oberfläche sind.

Durch die Gleichung 3) ist aber eine Parabel charakterisiert, deren Achse in der undurchlässigen Schicht liegt. Für jeden Punkt P ist nämlich bei dieser Kurve $\tan \alpha = -\frac{y}{2x}$, also ist für zwei Parabelpunkte

Fig. 231.



$$\frac{\tan \vartheta_1}{\tan \vartheta} = \frac{-\frac{y_1}{2x_1}}{-\frac{y}{2x}} = \frac{y_1}{y}\frac{x}{x_1}.$$

Nach bekannter Parabeleigenschaft ist zugleich $\frac{y^2}{y_1^2} = \frac{x}{x_1}$, also

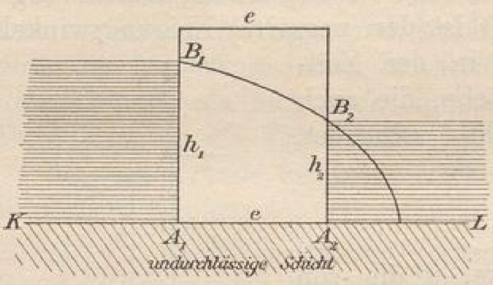
$$\frac{y}{y_1} = \frac{y_1}{y}\frac{x}{x_1}.$$

Da die rechten Seiten übereinstimmen, gilt dasselbe von den linken Seiten, und so folgt Gleichung 3).

Aus $\frac{y^2}{y_1^2} = \frac{x}{x_1}$ folgt $y^2 = y_1^2 \frac{x}{x_1} = 2y_1 \frac{y_1}{2x_1} x = 2y_1 \tan\alpha_1 x$, oder nach 2*)

$$4) \qquad y^2 = -\frac{2Q}{b\varkappa} x.$$

Fig. 232.



Es handelt sich also um diejenige Parabel, deren Achse in die Grenzlinie KL der undurchlässigen Schicht fällt, und die durch die Niveaupunkte B_1 und B_2 geht. Der Scheitel S ist Nullpunkt des Koordinatensystems.

Aus den besonderen Werten

$$h_1^2 = -\frac{2Q}{b\varkappa} x_1 \quad \text{und} \quad h_2^2 = -\frac{2Q}{b\varkappa} x_2$$

folgt zunächst

$$h_1^2 - h_2^2 = -\frac{2Q}{b\varkappa}(x_1 - x_2) = \frac{2Q}{b\varkappa}(x_2 - x_1) = \frac{2Q}{b\varkappa} e,$$

so dafs

$$5) \qquad Q = \frac{b\varkappa\,(h_1^2 - h_2^2)}{2e}$$

ist. Folglich:

Der Sickerverlust ist umgekehrt proportional der Dammbreite e, direkt proportional der Länge b, der Durchlafskonstanten $\varkappa$ und der Differenz der Quadrate der Grenzhöhen h_1 und h_2.

Nach 5) läfst sich die Parabelgleichung 4) umformen in

$$6) \qquad y^2 = -\frac{h_1^2 - h_2^2}{e} x.$$

Die Tangente des Neigungswinkels für jede Stelle ist umgekehrt proportional der Höhe y, nämlich

$$7) \qquad \tan\vartheta = -\frac{Q}{b\varkappa y} = -\frac{h_1^2 - h_2^2}{2ey},$$

die Geschwindigkeit ist ebenfalls umgekehrt proportional der Höhe y, da

$$8) \qquad v = -\varkappa \tan\vartheta = \varkappa \frac{h_1^2 - h_2^2}{2ey}.$$

Die Entfernung $A_1 S$ ist nach 6)

$$x_1 = -\frac{e h_1^2}{h_1^2 - h_2^2} = -\frac{e}{1 - \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2}.$$

Den Höchstwert des Sickerverlustes erhält man für $h_2 = 0$. Er ist gleich $\frac{b \varkappa h_1^2}{2e}$. Die zugehörige Geschwindigkeit würde unendlich grofs sein, da nach 8) $y = 0$ in den Nenner treten würde.

[Dieser praktisch unmögliche Grenzfall ist der schwache Punkt der Theorie, der sich zunächst dadurch erledigt, dafs das ausströmende Wasser stets eine bestimmte endliche Höhe h_2 hat, so dafs der Grenzfall überhaupt niemals erreicht wird. Er entspricht der unendlichen Geschwindigkeit der Elektrizität bei punktförmigen Elektroden. Bedenklich aber bleibt, dafs in der Nähe von S Geschwindigkeiten stattfinden würden, welche die überhaupt mögliche Ausflufsgeschwindigkeit $v = \sqrt{2 g h_1}$ übertreffen, die der Dammbreite $e = 0$ entspricht. Es handelt sich also um eine Annäherungstheorie, die nur brauchbar sein kann, wenn $A_2 S$ nicht zu kleine Werte annimmt.]

Wichtig für unsere Zwecke ist nun folgendes: Die Gleichung

$$y = -\frac{2Q}{b \varkappa} x$$

würde eine ebene Schrägfläche geben, wie sie bei der Parallelströmung der Wärme und Elektrizität auftrat. Hier aber handelt es sich um

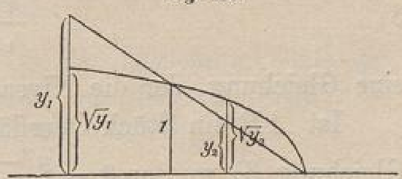
$$y = \sqrt{-\frac{2Q}{b \varkappa} x}.$$

Man kann also die zweite Fläche aus der ersten dadurch ableiten, dafs man an jeder Stelle geometrisch die Quadratwurzel der Ordinate bildet. Gemäfs der Proportion

$$1 : \sqrt{y} = \sqrt{y} : y$$

handelt es sich um die Konstruktion der mittleren Proportionalen zu 1 und y. (Fig. 233.)

Fig. 233.



Für den Fall der Parallelströmung hat sich also das vorausgesagte Resultat bestätigt.

Liegt die undurchlässige Schicht in unendlicher Tiefe, so werden die Dimensionen der Parabel unendlich grofs, d. h. es handelt sich um die gerade Linie $B_1 B_2$. Für diesen Fall stimmt also die Potentialfläche der Grundwasserströmung mit der der elektrischen Strömung nach dem Ohmschen Gesetze überein. Der Umstand, daſs Prof. Forchheimer den Fall unendlicher Tiefe an die Spitze seiner Abhandlung stellt, erschwert ihr Studium und läſst die Theorie als künstlicher erscheinen, als sie in Wirklichkeit ist.

287) Radialströmung. Das Grundwasser ströme von allen Seiten her in stationärer Weise einem Brunnen mit kontinuierlichem Betriebe zu. Um mathematische Einfachheit zu erhalten denke man sich eine etwa aus Dünensand bestehende kreisförmige, eigentlich cylindrisch begrenzte Insel im Meere und in ihrer Mitte einen bis zur horizontal gedachten undurchlässigen Schicht reichenden Brunnenschacht. Der ursprüngliche Grundwasserstand entspricht dann der Meeresoberfläche. Durch den Pumpbetrieb senkt sich der Wasserstand im Brunnen so lange, bis infolge der wachsenden Steilheit der Oberfläche des Grundwassers dessen Nachströmen stark genug geworden ist, um die Wasserentnahme auszugleichen. Von da ab bleibt seine Oberfläche konstant.

Jetzt ist nach der Theorie an jeder Stelle

1) $$v = + \varkappa \tan \vartheta,$$

denn $\tan \vartheta$ ist der Senkung wegen für jeden Radius negativ, aber auch v ist negativ, weil die Strömung dem zunehmenden Radius entgegengerichtet ist.

Die in der Zeiteinheit jeden der koncentrischen Cylinder durchströmende Wassermasse ist also

2) $$Q = 2\, r \pi y \varkappa \tan \vartheta,$$

wo r den Radius, y die Höhe des Cylinders, von der Grundschicht aus gemessen, bedeutet. Für einen bestimmten Cylinder sei

2*) $$Q = 2\, r_1 \pi y_1 \varkappa \tan \vartheta_1.$$

Aus der Gleichsetzung der linken Seiten folgt

$$r y \tan \vartheta = r_1 y_1 \tan \vartheta_1,$$

also ist

3) $$\frac{r y}{r_1 y_1} = \frac{\tan \vartheta_1}{\tan \vartheta},$$

eine Gleichung, der die Niveaufläche genügen muſs.

Ist AB ein Stück Oberfläche, jetzt steigend gedacht, so ist nach Gleichung 3) wo $\tan \vartheta = \frac{y'' - y'}{r'' - r'}$ zu setzen ist

3*) $$y(y'' - y') = r_1 y_1 \tan \vartheta_1 \frac{r'' - r'}{r} = \frac{c_1}{r}(r'' - r').$$