Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

287) Radialströmung

der der elektrischen Strömung nach dem Ohmschen Gesetze überein. Der Umstand, daſs Prof. Forchheimer den Fall unendlicher Tiefe an die Spitze seiner Abhandlung stellt, erschwert ihr Studium und läſst die Theorie als künstlicher erscheinen, als sie in Wirklichkeit ist.

287) Radialströmung. Das Grundwasser ströme von allen Seiten her in stationärer Weise einem Brunnen mit kontinuierlichem Betriebe zu. Um mathematische Einfachheit zu erhalten denke man sich eine etwa aus Dünensand bestehende kreisförmige, eigentlich cylindrisch begrenzte Insel im Meere und in ihrer Mitte einen bis zur horizontal gedachten undurchlässigen Schicht reichenden Brunnenschacht. Der ursprüngliche Grundwasserstand entspricht dann der Meeresoberfläche. Durch den Pumpbetrieb senkt sich der Wasserstand im Brunnen so lange, bis infolge der wachsenden Steilheit der Oberfläche des Grundwassers dessen Nachströmen stark genug geworden ist, um die Wasserentnahme auszugleichen. Von da ab bleibt seine Oberfläche konstant.

Jetzt ist nach der Theorie an jeder Stelle

1) $$v = + \varkappa \tan \vartheta,$$

denn $\tan \vartheta$ ist der Senkung wegen für jeden Radius negativ, aber auch v ist negativ, weil die Strömung dem zunehmenden Radius entgegengerichtet ist.

Die in der Zeiteinheit jeden der koncentrischen Cylinder durchströmende Wassermasse ist also

2) $$Q = 2\, r\pi y \varkappa \tan \vartheta,$$

wo r den Radius, y die Höhe des Cylinders, von der Grundschicht aus gemessen, bedeutet. Für einen bestimmten Cylinder sei

2*) $$Q = 2\, r_1 \pi y_1 \varkappa \tan \vartheta_1.$$

Aus der Gleichsetzung der linken Seiten folgt

$$r y \tan \vartheta = r_1 y_1 \tan \vartheta_1,$$

also ist

3) $$\frac{r y}{r_1 y_1} = \frac{\tan \vartheta_1}{\tan \vartheta},$$

eine Gleichung, der die Niveaufläche genügen muſs.

Ist AB ein Stück Oberfläche, jetzt steigend gedacht, so ist nach Gleichung 3) wo $\tan \vartheta = \frac{y'' - y'}{r'' - r'}$ zu setzen ist

3*) $$y(y'' - y') = r_1 y_1 \tan \vartheta_1 \frac{r'' - r'}{r} = \frac{c_1}{r}(r'' - r').$$

Die linke Seite kann aufgefaſst werden als Schicht eines Dreiecks, welches in jeder Höhe y den Querschnitt y hat, dessen Inhalt von irgend einer Höhe y_1 bis zu einer andern y von der Gröſse $\frac{y^2}{2} - \frac{y_1^2}{2}$ ist. Den Ausdruck rechts kann man auffassen als Horizontalstreifen einer Fläche, die in jeder Höhe r den Querschnitt $\frac{c_1}{r}$ hat, d. h. einer gleichseitigen Hyperbel, die bekanntlich von der Höhe 1 bis zur Höhe r gemessen den Inhalt $c_1 \overset{e}{\lg} r - c_1 \overset{e}{\lg} 1 = c_1 \overset{e}{\lg} r$ hat. Nun stimmen nach 3*) je zwei zusammengehörige Streifen beider Flächen überein, rechnet man also die letztere von 1 bis r, die erstere vom zugehörigen y_1 bis zum zugehörigen y, so muſs die Summe der Schichten der einen gleich der entsprechenden Summe der andern sein, d. h. es muſs werden

Fig. 234.

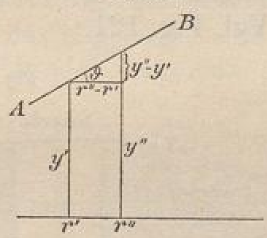
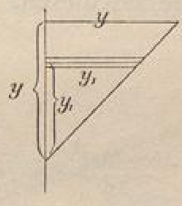


Fig. 235.



$$\frac{y^2}{2} - \frac{y_1^2}{2} = c_1 \lg r = r_1 y_1 \tan \vartheta_1 \lg r$$

oder

$$y^2 = 2 r_1 y_1 \tan \vartheta_1 \lg r + y_1^2.$$

Dieser Gleichung müssen also auch die Koordinaten der Kurven des Grundwasserstandes genügen.

Die Gleichung läſst sich unter Berücksichtigung von 2*) auch schreiben

4) $$y^2 = \frac{Q}{\pi \varkappa} \lg r + y_1^2$$

oder auch

4*) $$y = \sqrt{\frac{Q}{\pi \varkappa} \lg r + y_1^2}.$$

Nun steht aber diese Gleichung zur Gleichung

5) $$y = \frac{Q}{\pi \varkappa} \lg r + y_1^2,$$

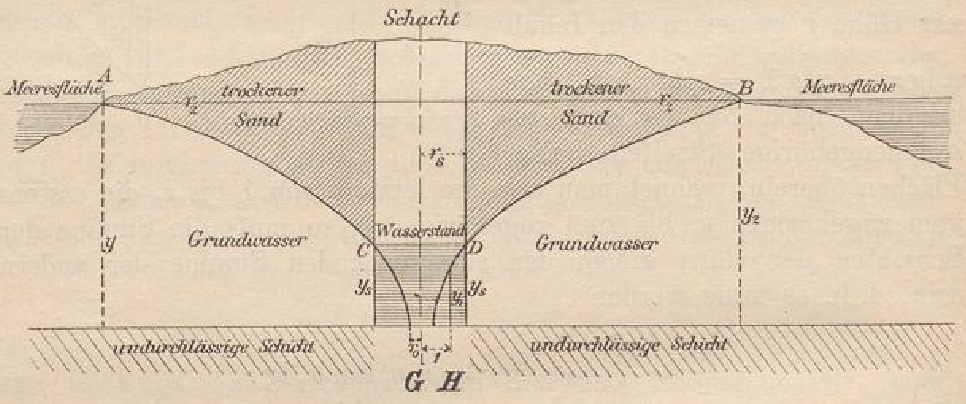
die eine logarithmische Linie darstellt, in der Beziehung, daſs die Ordinaten der Kurve 4*) die Quadratwurzeln aus denen der Kurve 5) sind, d. h. daſs jede Ordinate von 4*) gemäſs der Proportion

$$1 : \sqrt{y_1} = \sqrt{y_1} : y_1$$

als mittlere Proportionale zur Strecke 1 und zur Ordinate y_1 konstruiert werden kann. Dies entspricht der im Anfang gegebenen Voraussagung.

Die durch 5) dargestellte Potentialfläche entspricht dem Falle der Ausströmung der Elektrizität aus einem Punkte der unbegrenzten Platte, der die Elektrizität auf einem sehr grofsen Kreise zugeleitet wurde. Bei 4) handelt es sich um die entsprechende Wasserstandsfläche, deren Ordinaten durch Wurzelausziehung gefunden werden. Wie man die logarithmische Potentialfläche elementar konstruieren kann, so kann man auch die Niveaufläche für radiale Grundwasserströmung elementar konstruieren. Vgl. Fig. 121.

Fig. 236.



Die Zeichnung stellt den Vorgang schematisch dar. $AB = 2r_2$ ist der Durchmesser der Insel und zugleich die Linie des ursprünglichen Grundwasserstandes. HDB ist eine der durch Gleichung 4) dargestellten Kurven.

Ist r_s der Radius des Schachtes und y_s die zu r_s gehörige Ordinate der Kurve, y_2 die zu r_2 gehörige, so folgt nach 4) für diese Stellen

$$y_2^2 = \frac{Q}{\pi\varkappa} \lg r_2 + y_1^2,$$

$$y_s^2 = \frac{Q}{\pi\varkappa} \lg r_s + y_1^2,$$

also durch beiderseitige Subtraktion

$$6) \qquad y_2^2 - y_s^2 = \frac{Q}{\pi\varkappa}(\lg r_2 - \lg r_s) = \frac{Q}{\pi\varkappa} \lg\left(\frac{r_2}{r_s}\right).$$

Die dem Wasserstande y_s des Brunnens zugehörige Wasserentnahme Q, d. h. seine Ergiebigkeit für diese Einstellung, ist

$$7) \qquad Q = \frac{\pi\varkappa(y_2^2 - y_s^2)}{\lg r_2 - \lg r_s} = \frac{\pi\varkappa(y_2^2 - y_s^2)}{\lg\left(\frac{r_2}{r_s}\right)}.$$

Die Ergiebigkeit bei stationärem Betriebe ist also umgekehrt proportional dem Logarithmus des Radienverhältnisses $\frac{r_2}{r_s}$ und direkt proportional der Durchläfsigkeitskonstante $\varkappa$ und der Quadratdifferenz der Grenzhöhen, d. h. dem Ausdrucke $\left(y_2^2 - y_s^2\right)$.

Die Analogie mit den Formeln für die Parallelströmung fällt sofort in die Augen. Nach 6), wo für y_2 das allgemeine y zu setzen ist, läfst sich die Gleichung der Niveaufläche auch schreiben

$$8)\qquad y^2 - y_s^2 = \frac{Q}{\pi\varkappa}(\lg r - \lg r_s),$$

oder, indem man den Wert von Q aus 7) einsetzt:

$$9)\qquad \frac{y^2 - y_s^2}{y_2^2 - y_s^2} = \frac{\lg r - \lg r_s}{\lg r_2 - \lg r_s} = \frac{\lg \frac{r_2}{r_s}}{\lg \frac{r}{r_s}}.$$

Damit ist eine rein geometrische Gleichung gefunden, die nur von gemessenen Längen abhängig ist.

Wäre z. B. $r_2 = 1000$ m, $r_s = 1$ m, $y_2 = 30$ m, $y_s = 20$ m, so würde die Gleichung der Niveaufläche lauten

$$\frac{y^2 - 20^2}{30^2 - 20^2} = \frac{\overset{e}{\lg}\frac{r}{1}}{\overset{e}{\lg}\frac{1000}{1}} = \frac{\overset{e}{\lg} r}{\overset{e}{\lg} 1000} = \frac{\frac{1}{m}\overset{10}{\lg} r}{\frac{1}{m}\overset{10}{\lg} 1000} = \frac{\overset{10}{\lg} r}{\overset{10}{\lg} 1000} = \frac{\overset{10}{\lg} r}{3},$$

oder

$$y = \sqrt{\tfrac{500}{3}\overset{10}{\lg} r + 400}.$$

Die Kurve trifft die Grundfläche an der Stelle, wo $\frac{500}{3}\overset{10}{\lg} r = -400$ ist, also $\lg r = -\frac{1200}{500} = -2{,}4$ oder $\lg\frac{1}{r} = 2{,}4$, d. h. $\frac{1}{r} = 251$, so dafs die Entfernung von der Schachtachse gleich $\frac{1}{251}$ m ist.

Jede Niveaukurve setzt sich auf die Grundschicht senkrecht auf, denn nach Gleichung 3) ist $\tan\vartheta = \frac{r_1 y_1 \vartheta_1}{r y}$, was für $y = 0$ unendlich wird und $\vartheta = 90^0$ macht.

Zum obigen ganz willkürlichen Beispiele gehört nach 7) die Ergiebigkeit

$$Q = \frac{\pi\varkappa(30^2 - 20^2)}{\overset{e}{\lg}\frac{1000}{1}} = \frac{500\,\pi\varkappa}{\frac{1}{m}\overset{10}{\lg} 1000} = \frac{500\,\pi\varkappa m}{\overset{10}{\lg}\,1000} = \tfrac{500}{3}\,0{,}434\cdot\pi\varkappa = \sim 227\,\varkappa.$$

Wäre z. B. $\varkappa = \frac{1}{200}$, so würde die Ergiebigkeit für jede Sekunde gleich 1,135 cbm sein. Kennt man umgekehrt durch Pumpversuche $\varkappa = 1$ cbm, so würde $\varkappa = \frac{1}{227}$ sein, und zwar für den entsprechenden Dünensand, für den nun alle Aufgaben leicht zu lösen sein werden, z. B. auch für die Parallelströmung.

Wäre z. B. ein Bassin zur Ebbezeit mit seiner Wasseroberfläche 10 m über der undurchlässigen Schicht, die Meeresoberfläche selbst 9 m und würde die Trennung, rein schematisch gedacht, durch einen Damm von Dünensand in der Breite von 20 m herbeigeführt, so würde der Sickerverlust nach den obigen Formeln für das laufende Meter der Dammlänge sein

$$Q = \frac{b\varkappa\left(h_1^2 - h_2^2\right)}{2e} = 1 \cdot \frac{1}{227}\left(10^2 - 9^2\right) \cdot \frac{1}{2 \cdot 20} = \frac{19}{9080} \text{ cbm} = \sim 2 \text{ Liter}$$

auf die Sekunde.

Dabei ist jedoch das unmögliche Schema der Figur angenommen, denn der Dünensand wird sich nicht mit senkrechten Wänden einstellen. Auch der Wert von $\varkappa$ ist hier ganz willkürlich im Anschlufs an das obige Beispiel angenommen.

Rückt die Wand des Schachtes allzunahe an die Stelle heran, wo die Kurve sich auf die Grundfläche aufsetzt, so werden aus denselben Gründen, wie bei der Parallelströmung, die Formeln unbrauchbar.

288) **Bemerkung.** Es fragt sich, ob, wie bei der Parallelströmung, für unendliche Tiefe der Grundschicht der Unterschied zwischen der jetzt behandelten Niveaufläche und den früheren Potentialflächen aufhört. Zu diesem Zwecke schreibe man Gleichung 8) in der Form

$$(y + y_s)(y - y_s) = \frac{Q}{\pi\varkappa}(\lg r - \lg r_s)$$

oder

$$y - y_s = \frac{Q}{\pi\varkappa(y + y_s)}(\lg r - \lg r_s).$$

Ist nun y und auch y_s sehr grofs, so kann man statt $y + y_s$ schreiben $2y_s$, denn der endliche Unterschied darf gegen $2y_s$ vernachlässigt werden. Dies verwandelt die Gleichung in

$$y - y_s = \frac{Q}{2\pi\varkappa y_s}(\lg r - \lg r_s).$$

Dies aber ist die Gleichung einer gewöhnlichen logarithmischen Linie. Die Niveaufläche für sehr grofse Tiefen stimmt also überein mit einer gewissen Potentialfläche für elektrische Strömung.

289) **Folgerungen.** Aus den Gleichungen lassen sich gewisse Proportionen ablesen. Bildet man z. B. Gleichung 7) für zwei Fälle,