Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

290) Beispiele

die sich nur bezüglich der Verhältnisse $\frac{r_2}{r_s} = q$ und $\frac{r_2'}{r_s'} = q'$ unterscheiden, so erhält man durch Division für die Ergiebigkeiten das Verhältnis

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{\lg\left(\frac{r_2}{r_s}\right)}{\lg\left(\frac{r_2'}{r_s'}\right)} = \frac{\lg q'}{\lg q}.$$

Setzt man $q = e^n$, $q' = e^{n'}$, so folgt

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{n'}{n}.$$

Sollen sich die Ergiebigkeiten wie $1:2$ verhalten, so mufs $q = e^n$, $q' = e^{2n}$, also $q' = q^2$ sein, sollen sich die Ergiebigkeiten wie $1:n$ verhalten, so mufs $q' = q^n$ sein.

Projiziert man bei einer solchen Niveaufläche die zu den Höhen

$$\sqrt{c},\quad \sqrt{2c},\quad \sqrt{3c},\quad \sqrt{4c}, \ldots$$

gehörigen Niveaulinien auf die Grundfläche, so entstehen koncentrische Kreise, deren Radien in geometrischer Reihe aufeinander folgen, z. B. nach der Reihe

$$e^{c_1},\quad e^{2c_1},\quad e^{3c_1},\quad e^{4c_1}, \ldots$$

Dies folgt daraus, dafs bei der entsprechenden Potentialfläche für elektrische Strömung die zu diesen Kreisen gehörigen Ordinaten nach dem Gesetz

$$c,\quad 2c,\quad 3c,\quad 4c, \ldots$$

aufeinander folgen, für die Niveaufläche aber die Wurzeln auszuziehen sind.

Befindet sich der Brunnenschacht im Binnenlande auf ausgedehnter Grundwasser führender Ebene, so kann man die obigen Resultate mit um so gröfserer Annäherung als richtig benutzen, je ausgedehnter die Ebene bei homogenem Materiale ist. Allerdings liefse sich einwenden, dafs, je länger der Pumpbetrieb dauert, der Radius r_2, der dann Schnitte der Niveaukurve durch die Grundwasserebene giebt, gröfser und gröfser werden müsse. Dies ändert aber für die nähere Umgebung des Brunnens schliefslich doch nichts.

290) **Beispiele.**

a) Nachdem der Zusammenhang mit dem logarithmischen Potential einmal klar gelegt ist, lassen sich zahlreiche Resultate ohne weiteres aussprechen.

Liegt der Brunnenschacht auf kreisförmiger Insel excentrisch, so bilde man zu dem betreffenden Punkte P den reciproken Q und lege durch P und Q ein Kreisbüschel nebst zugeordneter Kreisschar. Vgl. Fig. 127. Die Kreise des Büschels sind Stromlinien, die Kreise der Schar sind Niveaulinien des Grundwassers. An Stelle der Gleichung 4*) tritt

$$y^2 = \frac{Q}{\pi \varkappa} \lg \frac{r_1}{r_2} + y_1^2$$

oder

$$y = \sqrt{\frac{Q}{\pi \varkappa} (\lg r_1 - \lg r_2) + y_1^2}\,.$$

Befindet sich der Brunnen in der Umgebung einer geradlinigen Küste, so hat man zu P nur das Spiegelbild zu bilden und wie vorher zu verfahren.

b) Handelt es sich um zwei Brunnenschachte auf unbegrenzter Ebene, deren Betrieb ein gleichartiger ist, so wird Fig. 125 mafsgebend, d. h. die Stromlinien sind ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln, die Niveaulinien konfokale Lemniskaten 2ter Ordnung. An Stelle von Gleichung 4) tritt

$$y^2 = \frac{Q}{\varkappa \pi} \lg (r_1 r_2) + y_1^2$$

oder

$$y = \sqrt{\frac{Q}{\pi \varkappa} (\lg r_1 + \lg r_2) + y_1^2}\,.$$

Sind die Ergiebigkeiten der Brunnen verschieden, verhalten sie sich z. B. wie $\nu_1 : \nu_2$, so handelt es sich um die Niveaukurven und Niveauflächen

$$y = \sqrt{\frac{Q}{\pi \varkappa} (\lg r_1^{\nu_1} + \lg r^{\nu_2}) + y_1^2}$$

oder

$$y = \sqrt{\frac{Q}{\pi \varkappa} (\nu_1 \lg r_1 + \nu_2 \lg r_2) + y_1^2} = \sqrt{\frac{Q}{\pi \varkappa} \lg (r_1^{\nu_1} r_2^{\nu_2}) + y_1^2}\,.$$

Ebenso wird bei n Brunnen von der Ergiebigkeit $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n$ die Gleichung

$$y = \sqrt{\frac{Q}{\pi \varkappa} (\nu_1 \lg r_1 + \nu_2 \lg r_2 + \nu_3 \lg r_3 + \ldots + \nu_1 \lg r_n) + y_1^2}$$

oder

$$y^2 - y_1^2 = \frac{Q}{\varkappa \pi} \sum \nu_1 \lg r.$$

Dem Leser bleibe es überlassen, weitere Übungsbeispiele zu bilden.

Geschieht z. B. das Auspumpen mit Hilfe eines Sickerschlitzes, so wird Fig. 140 in Kraft treten, bei der es sich um konfokale Ellipsen und Hyperbeln handelt. Die Gleichung geht über in

$$y^2 - y_1^2 = \frac{Q}{2\pi} \lg \left[\frac{p+q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - 1} \right],$$

wenn die Länge des Schlitzes gleich 1 gesetzt wird.

Durch Abbildungen wie $Z = \sqrt{2}$ kann man zu andern Formen der Sickerschlitze übergehen.

In allen Fällen erhält man Gleichungen von der Form

$$y^2 - y_1^2 = c \cdot V,$$

wo V das entsprechende logarithmische Potential ist.

Da aber dies nur noch den Wert von Übungsbeispielen hat, soll von weiterem abgesehen werden. Man versuche, andere Zeichnungen dieses Werkes oder der „Isogonalen Verwandtschaften“ entsprechend zu deuten.

291) Schlufswort. Der Leser hat in dem Vorgetragenen eine Reihe von Eigenschaften des Potentials und ziemlich viele Anwendungen dieser Funktion auf die Gebiete der Gravitation, der Elektrostatik und des Magnetismus, des Elektromagnetismus und der Elektrodynamik, auf die Lehre von den stationären Strömungen der Wärme, der Elektrizität und idealen inkompressiblen Flüssigkeiten, auf die Lehre von den freien Ausflufsstrahlen, von den Wirbelbewegungen und den Bewegungen des Grundwassers kennen gelernt. Der Zusammenhang mit den Faradayschen Kraftlinien führte zu den Faraday-Maxwellschen Anschauungen, zur Vorstellung der Wirbelfelder und zu den Hertzschen Schwingungen über. Auch über die Elastizitätslehre, über die Kapillartheorie und über die Lehre von den Hodographen hätten elementare Betrachtungen herangezogen werden können. Je weiter man aber eindringt, um so mehr macht sich das Bedürfnis geltend, mit den Waffen der höheren Analysis zu arbeiten. Die analytische Behandlung der Potentialtheorie wird jedoch jedem Leser erleichtert sein, der hier bereits einen ersten vorläufigen Einblick in diese Lehre erhalten hat.

Bezüglich der Gravitation findet man noch einiges Elementare in Schells „Theorie der Bewegung und der Kräfte“, wo mehrere Probleme über die Anziehung homogener Linien, Flächen und einfach gestalteter Körper geometrisch bezw. mit Hilfsmitteln der gewöhnlichen Arithmetik behandelt sind. Namentlich bei Schalen, die