Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

Kapitel XV. Anhang A. Zusätze zur Lehre von der Gravitation und der Elektrostatik, Flächen zweiten Grades betreffend.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

Kapitel XV. Anhang A.

Zusätze zur Lehre von der Gravitation und der Elektrostatik, Flächen zweiten Grades betreffend.

---

1) Übergang von der Kugel zum Ellipsoid. Man denke sich eine Kugel auf horizontaler Fläche ruhend. Jeden ihrer Horizontalschnitte verschiebe man horizontal so weit, dafs die Mittelpunkte eine schräge Gerade bilden; dann entsteht ein dreiachsiges Ellipsoid. [Das allgemeinste ist es noch nicht, weil seine Höhe bei vorliegender Stellung gleich dem Durchmesser des gröfsten Kreisschnittes ist. Man kann aber den Vorgang mit anderen Parallelschnitten wiederholen, was volle Allgemeinheit, sonst aber nichts Neues giebt.] Zwischen beiden Körpern besteht ein Affinitätsverhältnis. Jeder Geraden innerhalb des einen entspricht eine Gerade innerhalb des anderen, jeder Ebene eine Ebene, die durch Horizontalprojektion aufeinander bezogen sind.

Ganz ebenso gehen koncentrische Kugelschalen in „ähnlich begrenzte Ellipsoidschalen“ über. Bei jeder in vier Punkten schneidenden Sehne sind bei der Hohlkugel, folglich auch bei der ähnlich begrenzten Ellipsoidschale, die „Aufsenstücke“ gleich. Jeder ebene Schnitt der Ellipsoidschale giebt ähnliche Ellipsen. Entsprechende körperliche Teile beider Körper sind inhaltsgleich, was jedoch nicht von entsprechenden Flächen gilt.

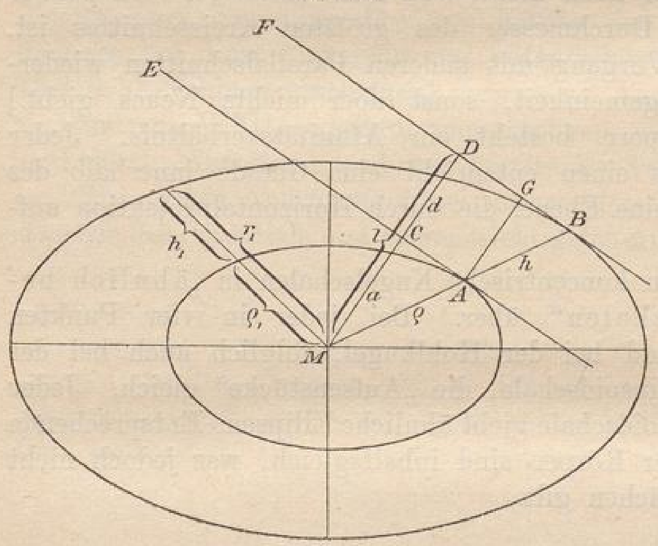
2) Anziehung des Ellipsoids und der ähnlich begrenzten Ellipsoidschale im Innern.

Man denke sich die Kugelschale dünn, jedoch körperlich. Nach Fig. 17 ist dann die Anziehung, die je zwei kleine Antipodenteile in Bezug auf einen Punkt Q auf die in diesem befindliche Masseneinheit ausüben, gleich Null, weil ihre Massen direkt proportional den Quadraten der Abstände, die Anziehungen jeder Einheit aber umgekehrt proportional diesen Abständen sind. Überträgt man den entstehenden Kegel durch die obige Horizontalverschiebung in das Ellipsoid, so bleiben die Massen dieselben, aber auch $l_1^2 : l_2^2$ bleibt dasselbe Verhältnis (Parallelprojektion). Die Anziehung ist also auch hier gleich Null. Folglich ist zunächst die Anziehung einer dünnen, ähnlich begrenzten Ellipsoidschale gleich Null, das Potential in ihrem Innern demnach konstant. Nun kann man aber jede beliebig dicke Ellipsoidschale solcher Art in ähnliche dünne Schichten zerlegen. Folglich gilt der Satz:

Die Anziehung der homogenen ähnlich begrenzten Ellipsoidschale auf Massen, die im Hohlraum liegen, ist gleich Null. Im massiven Ellipsoid nimmt die Anziehung im Innern bis zu Null ab. In jedem Punkte des Innern wirkt nur noch die Anziehung des Kernes, der durch das ähnliche, durch den Punkt gelegte Ellipsoid begrenzt wird.

3) Geometrische Folgerung. MB in Fig. 237 sei ein Halbmesser der ähnlich begrenzten Ellipsoidschale. Die Tangentialebenen AE und BF (in A und B berührend) sind aus Ähnlichkeitsgründen parallel. $MD = l$ sei das von M aus auf die Ebene gefällte Lot. Dann ist in den Bezeichnungen der Figur $MA : MB = MC : MD$ oder $\varrho : r = a : l$. Ebenso ist $\varrho : h = a : d$ und $h : r = d : l$. Nun ist aber für alle Radien der ähnlich begrenzten Schale $\frac{h}{\varrho} = \frac{h_1}{\varrho_1}$, ebenso $\frac{h}{r} = \frac{h_1}{r_1}$, und $\frac{\varrho}{r} = \frac{\varrho_1}{r_1}$, so daſs jeder dieser Brüche für alle Lagen des Radius und der Tangentialebene konstanten Wert behält. Statt CD kann auch die Parallele AG gesetzt werden. Dabei liegt G auſserhalb des Ellipsoids. Ist aber die Schale dünn, so rückt G nahe an B heran, der Abstand vom Ellipsoid aber wird unendlich klein zweiter Ordnung. [Man denke an die Sekanten-Tangentenformel der Kugel: Auſsenstück mal ganze Sekante gleich dem Quadrate der Tangente.] Dann darf man also $AG = d$ als die Dicke der Ellipsoidschale betrachten.

Fig. 237.



Jetzt ist wie vorher $\frac{d}{l} = \varkappa$, wo $\varkappa$ eine Konstante ist, also $d = \varkappa \cdot l$. Folglich:

Die Dicke einer ähnlich begrenzten dünnen Ellipsoidschale ist proportional dem vom Mittelpunkte auf die zugehörige Tangentialebene gefällten Lote.

4) Physikalische Folgerungen. Regelt man bei einer dünnen Ellipsoidschale die Dicke so, dafs diese proportional dem vom Mittelpunkte auf die Tangentialebene gefällten Lote ist, so ist die Anziehung im Hohlraum gleich Null und das Potential ist dort konstant.

Fafst man nun die Massenbelegung als eine Flächenbelegung auf, so tritt an Stelle der Dicke d die Dichte δ der Belegung. Folglich:

Wird eine Ellipsoidfläche so mit Masse belegt, dafs die Dichte der Flächenbelegung an jeder Stelle proportional dem Abstande der zugehörigen Tangentialebene vom Mittelpunkte ist, so ist die Anziehung dieser Belegung für den ganzen Innenraum gleich Null und das Potential ist dort konstant.

Auch die Umkehrung dieses Satzes ist richtig.

Ladet man nun einen Konduktor mit Elektrizität, so ordnet sich diese nach den früheren Betrachtungen so auf der Oberfläche an, dafs das Potential im Innern konstant und die Anziehung Null ist, denn wäre dies nicht der Fall, so würden elektrische Scheidungskräfte eintreten. Folglich:

Ladet man einen ellipsoidischen Konduktor mit Elektrizität, so ist nach Eintreten des Gleichgewichtszustandes die Dichte an jeder Stelle proportional dem Abstande der zugehörigen Tangentialebene vom Mittelpunkte.

Die Dichte ist also am gröfsten im Endpunkte der längsten, am kleinsten am Endpunkte der kleinsten Hauptachse; sie ist konstant für diejenigen Punkte der Ellipsoidfläche, für welche der Abstand der Tangentialebenen konstant ist.

Diese Abstände spielten schon in Band I § 406 bei dem Culmannschen Centralellipsoid eine wichtige Rolle. Aufserdem sind sie von Bedeutung für die Hauptkrümmungsradien des Ellipsoids. (Vgl. Salmon Fiedler, analytische Geometrie des Raumes, I § 205.) Die Dichtigkeit steht also auch in Beziehung zur Lehre von den Trägheitsmomenten und der Flächenkrümmung.

Aufgabe. Den Abstand des Mittelpunktes von der zum Punkte $x_1 y_1 z_1$ gehörigen Tangentialebene zu berechnen.

Auflösung. Die Gleichung des Ellipsoides, die sich aus der der Kugel ebenso leicht durch Affinität ableiten läfst, wie die der Ellipse aus der des Kreises, möge sein

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Dann ist die der Tangentialebene für den Oberflächenpunkt $x_1 y_1 z_1$ von der Form

$$\frac{x x_1}{a^2}+\frac{y y_1}{b^2}+\frac{z z_1}{c^2}=1.$$

Dies wird ganz ähnlich, wie bei der Tangentengleichung der Ellipse, elementar gezeigt. Setzt man hier $y_1=0$ und $z_1=0$, so folgt $x=\frac{a^2}{x_1}$ als Entfernung des Schnittpunktes für die X-Achse und die Tangentialebenen. Ebenso gilt für die anderen Achsen $y=\frac{b^2}{y_1}$, $z=\frac{c^2}{z_1}$. Demnach bildet das vom Mittelpunkte auf die Ebene gefällte Lot l mit den Achsen Winkel, die sich bestimmen aus

$$\cos\alpha=\frac{l}{x}=\frac{l x_1}{a^2},\quad \cos\beta=\frac{l}{y}=\frac{l y_1}{b^2},\quad \cos\gamma=\frac{l}{z}=\frac{l z_1}{c^2}.$$

Aus

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

folgt demnach

$$l^2\left(\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}+\frac{z_1^2}{c^4}\right)=1,$$

demnach ist

$$l=\frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}+\frac{z_1^2}{c^4}}}.$$

Damit ist die Aufgabe gelöst. Folglich:

Die Dichte der elektrischen Belegung eines ellipsoidischen Konduktors ist proportional dem Ausdrucke

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}+\frac{z_1^2}{c^4}}}.$$

Ebenso ist die Dicke einer ähnlich begrenzten Ellipsoidschale diesem Ausdrucke proportional. Setzt man nämlich die Konstante

$$\frac{d}{l}=\frac{h}{\varrho}=\alpha,$$

so ist $d=l\alpha$, und damit ist die Proportionalität mit l klargelegt.

Aufgabe. Das Volumen einer dünnen ähnlich begrenzten Ellipsoidschale zu berechnen.

Auflösung. Setzt man $\frac{d}{l} = \frac{h}{\varrho} = \alpha$, so ist

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{\varrho + h}{\varrho} = 1 + \frac{h}{\varrho} = 1 + \alpha,$$

also $r = \varrho\,(1 + \alpha)$. Daraus folgt für die Halbachsen

$$a_1 = a\,(1 + \alpha), \quad b_1 = b\,(1 + \alpha), \quad c_1 = c\,(1 + \alpha).$$

Ist der Inhalt des inneren Ellipsoids $J_2 = \frac{4}{3}\,abc\pi$, so ist nach dem Gesagten der des äufseren

$$J_1 = \frac{4}{3}\,a\,(1 + \alpha)\,b\,(1 + \alpha)\,c\,(1 + \alpha)\,\pi = \frac{4}{3}\,\pi abc\,(1 + \alpha)^3$$
$$= \frac{4}{3}\,\pi abc\,(1 + 3\,\alpha + 3\,\alpha^2 + \alpha^3).$$

Nun war die Dicke als klein angenommen, also auch α als klein, man kann daher das Unendlichkleine höherer Ordnung vernachlässigen und (besonders für Flächenbelegungen) setzen $J_1 = \frac{4}{3}\,\pi abc\,(1 + 3\,\alpha)$. Daraus folgt

$$J_1 - J_2 = \frac{4}{3}\,abc\pi\,(1 + 3\,\alpha) - \frac{4}{3}\,abc\pi = 4\,abc\pi\alpha = 4\,abc\pi\frac{h}{\varrho}$$
$$= 4\,abc\pi\,\frac{d}{l}\cdot$$

Insbesondere folgt

$$d = l\alpha = \frac{l\,(J_1 - J_2)}{4\,abc\,\pi} = \frac{lJ}{4\,abc\,\pi} = \frac{J}{4\,abc\,\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4}}}\cdot$$

Ist also der Inhalt J einer dünnen Ellipsoidschale (ähnlicher Begrenzung) bekannt und sind die Hauptachsen a, b, c gegeben, so ist die Dicke an jeder Stelle x_1, y_1, z_1 nach der gegebenen Formel zu berechnen.

Physikalische Folgerungen. Wird ein ellipsoidischer Konduktor mit der elektrischen Menge E geladen, so ist die Dichte δ an jeder Stelle $x_1 y_1 z_1$

1) $$\delta = \frac{J}{4\,\pi abc}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_2^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4}}}\cdot$$

Für $y_1 = 0$ und $z_1 = 0$ folgt

$$\delta = \frac{E}{4\,\pi abc}\cdot\frac{a^2}{x_1} = \frac{Ea}{4\,\pi bcx_1}\cdot$$

Dies gilt für die Schnittlinie mit der YZ-Ebene. Für $x_1 = a$, den Endpunkt der langen Achse, folgt

$$\delta_a = \frac{E}{4\pi abc} a = \frac{E}{4\pi bc},$$

für die Endpunkte der anderen Achsen ist

$$\delta_b = \frac{E}{4\pi abc} b = \frac{E}{4\pi ca}, \quad \delta_c = \frac{E}{4\pi abc} c = \frac{E}{4\pi ab}.$$

Aus der ersten Schreibweise folgt

$$\delta_a : \delta_b : \delta_c = a : b : c.$$

Um zum Sonderfalle der elliptischen Scheibe überzugehen, schreibe man die Formel 1) in der Form

$$\delta = \frac{E}{4\pi ab} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2 c^2}{a^4} + \frac{y_1^2 c^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^2}}}.$$

Aus der Ellipsoidformel folgt aber für den Punkt $x_1 y_1 z_1$

$$\frac{z_1^2}{c^2} = 1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}.$$

Einsetzung dieses Wertes giebt

$$\delta = \frac{E}{4ab\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2 c^2}{a^4} + \frac{y_1^2 c^2}{b^4} + 1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}}}.$$

Ist hier $c = 0$, so handelt es sich um eine elliptische Platte mit den Halbachsen a und b. Und es folgt der Satz:

Ladet man eine dünne elliptische Platte mit den Halbachsen a und b mit der elektrischen Menge E, so wird die Dichte der Belegung in jedem Punkte $x_1 y_1$

2) $$\delta = \frac{E}{4ab\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}}}.$$

Handelt es sich um eine kreisförmige Platte, so wird

3) $$\delta = \frac{E}{4a^2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x_1^2 + y_1^2}{a^2}}} = \frac{E}{4a^2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}} = \frac{E}{4a\pi\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

Bei 2) und 3) folgt aus der Gleichung der Kurven für die Randlinie die Dichtigkeit $\delta = \infty$. Handelt es sich um eine gerade Linie von der Länge a, so schreibe man Gleichung 2) in der Form

$$\delta = \frac{E}{4a\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{b^2 - \frac{b^2 x_1^2}{a^2} - y_1^2}} = \frac{E}{4a\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{b^2 - \frac{b^2 x_1^2}{a^2} - \left(b^2 - \frac{x_1^2}{a^2} b^2\right)}} = \frac{E}{4a\pi} \cdot \frac{1}{0},$$

was einen unendlich grofsen Wert giebt. Dies ist naturgemäfs, da jetzt die ganze Belegung sich auf der Randlinie befindet.

Macht man für die Formel 2) die elektrische Menge $E_1 = E \cdot n$, also n mal so grofs und zugleich $b_1 = nb$, so erhält man

$$\delta = \frac{nE}{4a(nb)\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{n^2 b^2}}}.$$

Für grofses n kann man dann $\frac{y_1^2}{n^2 b^2}$ gleich Null setzen und erhält

$$4)\quad \delta = \frac{nE}{4a(nb)\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2}}} = \frac{E_1}{4ab_1\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2}}} = \frac{E_1}{4b_1\pi\sqrt{a^2 - x_1^2}}.$$

Jetzt ist die Dichte nur von x_1 abhängig, d. h. es handelt sich um das in Nr. 194 und Fig. 140 dargestellte zweidimensionale Problem, welches auf konfokale Ellipsen und Hyperbeln bezw. deren Cylinder führt.

Für unsere Zwecke reicht es hin, daraus den Schlufs zu ziehen, dafs die Niveauflächen für den Fall 2) überhaupt konfokale Flächen zweiten Grades sind.

Influenzproblem. Man lege um eine elliptische Fläche eine konfokale Ellipse und durch ihre kleine Achse in normaler Ebene eine Ellipsenfläche, die ihre Brennpunkte in den Endpunkten der kleinen Achse der ersten Ellipse hat. Durch die beiden letzten Flächen läfst sich dann ein dreiachsiges Ellipsoid legen, für welches die erste Ellipse die Fokalellipse ist.

Wird nun die Fläche der Fokalellipse mit der Elektrizität $+E$ geladen, so sind nach obiger Bemerkung die Kraftlinien durch die Schnittkurven der konfokalen ein- und zweimanteligen Hyperboloide gegeben. Diese schneiden jedes der konfokalen Ellipsoide konfokal, beeinflussen also eine auf einem solchen bereits vorhandene Ladung nicht in ihrer Verteilung. War keine Ladung da, und leitet man die

Schale nach der Erde ab, so sammelt sich die Influenzelektrizität erster Ordnung $-E$ in gleicher Quantität an und ordnet sich nach Vorschrift der Formel 1) an. Die Wirkungen von $+E$ und $-E$ nach aufsen heben sich auf. Beide Ladungen wirken also nach aufsen, vom Vorzeichen abgesehen, in gleicher Weise.

Für die Influenzelektrizität gilt aber die Formel $p_1 = 4\pi\delta$ (vgl. Nr. 124), wo p_1 die Anziehung des Kernkörpers bezw. seiner Belegung ist. Folglich:

Ladet man eine elliptische Fläche mit der Elektrizität E, so ist die Wirkung in jedem Raumpunkt $x_1 y_1 z_1$ auf die Einheit

$$p = \frac{E}{abc} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4}}},$$

wo a, b, c die Hauptachsen des durch den Punkt gelegten Ellipsoids sind. Die Richtung von p ist normal gegen diese Fläche. Die Kraftröhren gehorchen bezüglich ihrer Querschnitte der Gleichung $pF = p_1 F_1$.

Entsprechendes gilt von der Ladung jeder Ellipsoidfläche bezw. jedes ellipsoidischen Konduktors.

Nun kann man aber an Stelle der elektrischen Belegung eine Massenbelegung setzen, an Stelle der Dichte δ die entsprechende Dicke d der Schale mit ähnlicher Begrenzung. Folglich, wenn die Gravitationskonstante $\varkappa = 1$ gesetzt wird:

Eine ähnlich begrenzte Ellipsoidschale von der homogen verteilten Masse m wirkt auf jeden Raumpunkt $x_1 y_1 z_1$ in der Stärke

$$p = \frac{m}{abc} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4}}},$$

wo [a, b, c die Halbachsen des durch den Punkt gelegten konfokalen Ellipsoids sind. Die Richtung ist normal gegen diese Fläche. Diese ist also Niveaufläche.

Hat man zwei Schalen, deren Aufsenflächen konfokale Ellipsoide sind, deren Innenflächen bezw. Dicken sich nach dem Gesetz der ähnlichen Begrenzung richten, so wirken beide nach aufsen identisch, wenn die Massen gleich sind, sie wirken im Verhältnis der Massen, wenn diese verschieden sind.

Dieser Satz gilt auch von zwei homogenen massiven Ellipsoiden (Mac Laurin).

Damit sind durch einfache physikalische Überlegungen Sätze der Gravitationstheorie (und Elektrostatik) abgeleitet, die von hervorragenden Analytikern entdeckt und von Chasles elementar bewiesen wurden. Näheres findet man bei Schell: Theorie der Bewegung und der Kräfte in dem Abschnitte Potential.

Die besonderen Fälle der Drehungsellipsoide, die der Belegung der Flächen von Fokalhyperbeln und von ein- und zweimanteligen Hyperboloiden lassen sich hieran anschliefsen. Dies sei jedoch dem Studium oder der eigenen Arbeit des Lesers überlassen.