Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

3) Geometrische Folgerung

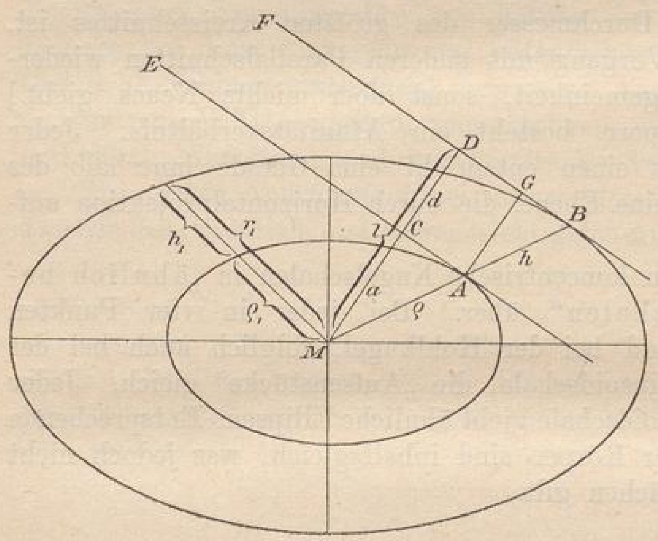
urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

stehenden Kegel durch die obige Horizontalverschiebung in das Ellipsoid, so bleiben die Massen dieselben, aber auch $l_1^2 : l_2^2$ bleibt dasselbe Verhältnis (Parallelprojektion). Die Anziehung ist also auch hier gleich Null. Folglich ist zunächst die Anziehung einer dünnen, ähnlich begrenzten Ellipsoidschale gleich Null, das Potential in ihrem Innern demnach konstant. Nun kann man aber jede beliebig dicke Ellipsoidschale solcher Art in ähnliche dünne Schichten zerlegen. Folglich gilt der Satz:

Die Anziehung der homogenen ähnlich begrenzten Ellipsoidschale auf Massen, die im Hohlraum liegen, ist gleich Null. Im massiven Ellipsoid nimmt die Anziehung im Innern bis zu Null ab. In jedem Punkte des Innern wirkt nur noch die Anziehung des Kernes, der durch das ähnliche, durch den Punkt gelegte Ellipsoid begrenzt wird.

3) Geometrische Folgerung. MB in Fig. 237 sei ein Halbmesser der ähnlich begrenzten Ellipsoidschale. Die Tangentialebenen AE und BF (in A und B berührend) sind aus Ähnlichkeitsgründen parallel. $MD = l$ sei das von M aus auf die Ebene gefällte Lot. Dann ist in den Bezeichnungen der Figur $MA : MB = MC : MD$ oder $\varrho : r = a : l$. Ebenso ist $\varrho : h = a : d$ und $h : r = d : l$. Nun ist aber für alle Radien der ähnlich begrenzten Schale $\frac{h}{\varrho} = \frac{h_1}{\varrho_1}$, ebenso $\frac{h}{r} = \frac{h_1}{r_1}$, und $\frac{\varrho}{r} = \frac{\varrho_1}{r_1}$, so daſs jeder dieser Brüche für alle Lagen des Radius und der Tangentialebene konstanten Wert behält. Statt CD kann auch die Parallele AG gesetzt werden. Dabei liegt G auſserhalb des Ellipsoids. Ist aber die Schale dünn, so rückt G nahe an B heran, der Abstand vom Ellipsoid aber wird unendlich klein zweiter Ordnung. [Man denke an die Sekanten-Tangentenformel der Kugel: Auſsenstück mal ganze Sekante gleich dem Quadrate der Tangente.] Dann darf man also $AG = d$ als die Dicke der Ellipsoidschale betrachten.

Fig. 237.



Jetzt ist wie vorher $\frac{d}{l} = \varkappa$, wo $\varkappa$ eine Konstante ist, also $d = \varkappa \cdot l$. Folglich:

Die Dicke einer ähnlich begrenzten dünnen Ellipsoidschale ist proportional dem vom Mittelpunkte auf die zugehörige Tangentialebene gefällten Lote.

4) Physikalische Folgerungen. Regelt man bei einer dünnen Ellipsoidschale die Dicke so, dafs diese proportional dem vom Mittelpunkte auf die Tangentialebene gefällten Lote ist, so ist die Anziehung im Hohlraum gleich Null und das Potential ist dort konstant.

Fafst man nun die Massenbelegung als eine Flächenbelegung auf, so tritt an Stelle der Dicke d die Dichte δ der Belegung. Folglich:

Wird eine Ellipsoidfläche so mit Masse belegt, dafs die Dichte der Flächenbelegung an jeder Stelle proportional dem Abstande der zugehörigen Tangentialebene vom Mittelpunkte ist, so ist die Anziehung dieser Belegung für den ganzen Innenraum gleich Null und das Potential ist dort konstant.

Auch die Umkehrung dieses Satzes ist richtig.

Ladet man nun einen Konduktor mit Elektrizität, so ordnet sich diese nach den früheren Betrachtungen so auf der Oberfläche an, dafs das Potential im Innern konstant und die Anziehung Null ist, denn wäre dies nicht der Fall, so würden elektrische Scheidungskräfte eintreten. Folglich:

Ladet man einen ellipsoidischen Konduktor mit Elektrizität, so ist nach Eintreten des Gleichgewichtszustandes die Dichte an jeder Stelle proportional dem Abstande der zugehörigen Tangentialebene vom Mittelpunkte.

Die Dichte ist also am gröfsten im Endpunkte der längsten, am kleinsten am Endpunkte der kleinsten Hauptachse; sie ist konstant für diejenigen Punkte der Ellipsoidfläche, für welche der Abstand der Tangentialebenen konstant ist.

Diese Abstände spielten schon in Band I § 406 bei dem Culmannschen Centralellipsoid eine wichtige Rolle. Aufserdem sind sie von Bedeutung für die Hauptkrümmungsradien des Ellipsoids. (Vgl. Salmon Fiedler, analytische Geometrie des Raumes, I § 205.) Die Dichtigkeit steht also auch in Beziehung zur Lehre von den Trägheitsmomenten und der Flächenkrümmung.

Aufgabe. Den Abstand des Mittelpunktes von der zum Punkte $x_1 y_1 z_1$ gehörigen Tangentialebene zu berechnen.