



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung**

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik

**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig, 1898**

4) Physikalische Folgerungen

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77934](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77934)

Jetzt ist wie vorher  $\frac{d}{l} = \kappa$ , wo  $\kappa$  eine Konstante ist, also  $d = \kappa \cdot l$ .  
Folglich:

Die Dicke einer ähnlich begrenzten dünnen Ellipsoidschale ist proportional dem vom Mittelpunkte auf die zugehörige Tangentialebene gefällten Lote.

4) Physikalische Folgerungen. Regelt man bei einer dünnen Ellipsoidschale die Dicke so, daß diese proportional dem vom Mittelpunkte auf die Tangentialebene gefällten Lote ist, so ist die Anziehung im Hohlraum gleich Null und das Potential ist dort konstant.

Faßt man nun die Massenbelegung als eine Flächenbelegung auf, so tritt an Stelle der Dicke  $d$  die Dichte  $\delta$  der Belegung. Folglich:

Wird eine Ellipsoidfläche so mit Masse belegt, daß die Dichte der Flächenbelegung an jeder Stelle proportional dem Abstände der zugehörigen Tangentialebene vom Mittelpunkte ist, so ist die Anziehung dieser Belegung für den ganzen Innenraum gleich Null und das Potential ist dort konstant.

Auch die Umkehrung dieses Satzes ist richtig.

Ladet man nun einen Konduktor mit Elektrizität, so ordnet sich diese nach den früheren Betrachtungen so auf der Oberfläche an, daß das Potential im Innern konstant und die Anziehung Null ist, denn wäre dies nicht der Fall, so würden elektrische Scheidungskräfte eintreten. Folglich:

Ladet man einen ellipsoidischen Konduktor mit Elektrizität, so ist nach Eintreten des Gleichgewichtszustandes die Dichte an jeder Stelle proportional dem Abstände der zugehörigen Tangentialebene vom Mittelpunkte.

Die Dichte ist also am größten im Endpunkte der längsten, am kleinsten am Endpunkte der kleinsten Hauptachse; sie ist konstant für diejenigen Punkte der Ellipsoidfläche, für welche der Abstand der Tangentialebenen konstant ist.

Diese Abstände spielten schon in Band I § 406 bei dem Culmannschen Centralellipsoid eine wichtige Rolle. Außerdem sind sie von Bedeutung für die Hauptkrümmungsradien des Ellipsoids. (Vgl. Salmon Fiedler, analytische Geometrie des Raumes, I § 205.) Die Dichtigkeit steht also auch in Beziehung zur Lehre von den Trägheitsmomenten und der Flächenkrümmung.

**Aufgabe.** Den Abstand des Mittelpunktes von der zum Punkte  $x_1, y_1, z_1$  gehörigen Tangentialebene zu berechnen.

**Auflösung.** Die Gleichung des Ellipsoides, die sich aus der der Kugel ebenso leicht durch Affinität ableiten läßt, wie die der Ellipse aus der des Kreises, möge sein

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Dann ist die der Tangentialebene für den Oberflächenpunkt  $x_1 y_1 z_1$  von der Form

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} + \frac{z z_1}{c^2} = 1.$$

Dies wird ganz ähnlich, wie bei der Tangentengleichung der Ellipse, elementar gezeigt. Setzt man hier  $y_1 = 0$  und  $z_1 = 0$ , so folgt  $x = \frac{a^2}{x_1}$  als Entfernung des Schnittpunktes für die X-Achse und die Tangentialebenen. Ebenso gilt für die anderen Achsen  $y = \frac{b^2}{y_1}$ ,  $z = \frac{c^2}{z_1}$ . Demnach bildet das vom Mittelpunkte auf die Ebene gefällte Lot  $l$  mit den Achsen Winkel, die sich bestimmen aus

$$\cos \alpha = \frac{l}{x} = \frac{l x_1}{a^2}, \quad \cos \beta = \frac{l}{y} = \frac{l y_1}{b^2}, \quad \cos \gamma = \frac{l}{z} = \frac{l z_1}{c^2}.$$

Aus

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

folgt demnach

$$l^2 \left( \frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4} \right) = 1,$$

demnach ist

$$l = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4}}}.$$

Damit ist die Aufgabe gelöst. Folglich:

Die Dichte der elektrischen Belegung eines ellipsoidischen Konduktors ist proportional dem Ausdrucke

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4}}}.$$

Ebenso ist die Dicke einer ähnlich begrenzten Ellipsoidschale diesem Ausdrucke proportional. Setzt man nämlich die Konstante

$$\frac{d}{l} = \frac{h}{c} = \alpha,$$

so ist  $d = l\alpha$ , und damit ist die Proportionalität mit  $l$  klargelegt.

**Aufgabe.** Das Volumen einer dünnen ähnlich begrenzten Ellipsoidschale zu berechnen.

**Auflösung.** Setzt man  $\frac{d}{l} = \frac{h}{\rho} = \alpha$ , so ist

$$\frac{r}{\rho} = \frac{\rho + h}{\rho} = 1 + \frac{h}{\rho} = 1 + \alpha,$$

also  $r = \rho(1 + \alpha)$ . Daraus folgt für die Halbachsen

$$a_1 = a(1 + \alpha), \quad b_1 = b(1 + \alpha), \quad c_1 = c(1 + \alpha).$$

Ist der Inhalt des inneren Ellipsoids  $J_2 = \frac{4}{3} abc\pi$ , so ist nach dem Gesagten der des äußeren

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{4}{3} a(1 + \alpha) b(1 + \alpha) c(1 + \alpha) \pi = \frac{4}{3} \pi abc(1 + \alpha)^3 \\ &= \frac{4}{3} \pi abc(1 + 3\alpha + 3\alpha^2 + \alpha^3). \end{aligned}$$

Nun war die Dicke als klein angenommen, also auch  $\alpha$  als klein, man kann daher das Unendlichkleine höherer Ordnung vernachlässigen und (besonders für Flächenbelegungen) setzen  $J_1 = \frac{4}{3} \pi abc(1 + 3\alpha)$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned} J_1 - J_2 &= \frac{4}{3} abc\pi(1 + 3\alpha) - \frac{4}{3} abc\pi = 4abc\pi\alpha = 4abc\pi \frac{h}{\rho} \\ &= 4abc\pi \frac{d}{l}. \end{aligned}$$

Insbesondere folgt

$$d = l\alpha = \frac{l(J_1 - J_2)}{4abc\pi} = \frac{lJ}{4abc\pi} = \frac{J}{4abc\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4}}}.$$

Ist also der Inhalt  $J$  einer dünnen Ellipsoidschale (ähnlicher Begrenzung) bekannt und sind die Hauptachsen  $a, b, c$  gegeben, so ist die Dicke an jeder Stelle  $x_1, y_1, z_1$  nach der gegebenen Formel zu berechnen.

**Physikalische Folgerungen.** Wird ein ellipsoidischer Konduktor mit der elektrischen Menge  $E$  geladen, so ist die Dichte  $\delta$  an jeder Stelle  $x_1 y_1 z_1$

$$1) \quad \delta = \frac{J}{4\pi abc} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4}}}.$$

Für  $y_1 = 0$  und  $z_1 = 0$  folgt

$$\delta = \frac{E}{4\pi abc} \cdot \frac{a^2}{x_1} = \frac{Ea}{4\pi bcx_1}.$$

Dies gilt für die Schnittlinie mit der  $YZ$ -Ebene. Für  $x_1 = a$ , den Endpunkt der langen Achse, folgt

$$\delta_a = \frac{E}{4\pi abc} a = \frac{E}{4\pi bc},$$

für die Endpunkte der anderen Achsen ist

$$\delta_b = \frac{E}{4\pi abc} b = \frac{E}{4\pi ca}, \quad \delta_c = \frac{E}{4\pi abc} c = \frac{E}{4\pi ab}.$$

Aus der ersten Schreibweise folgt

$$\delta_a : \delta_b : \delta_c = a : b : c.$$

Um zum Sonderfalle der elliptischen Scheibe überzugehen, schreibe man die Formel 1) in der Form

$$\delta = \frac{E}{4\pi ab} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2 c^2}{a^4} + \frac{y_1^2 c^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^2}}}.$$

Aus der Ellipsoidformel folgt aber für den Punkt  $x_1 y_1 z_1$

$$\frac{z_1^2}{c^2} = 1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}.$$

Einsetzung dieses Wertes giebt

$$\delta = \frac{E}{4ab\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2 c^2}{a^4} + \frac{y_1^2 c^2}{b^4} + 1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}}}.$$

Ist hier  $c = 0$ , so handelt es sich um eine elliptische Platte mit den Halbachsen  $a$  und  $b$ . Und es folgt der Satz:

Ladet man eine dünne elliptische Platte mit den Halbachsen  $a$  und  $b$  mit der elektrischen Menge  $E$ , so wird die Dichte der Belegung in jedem Punkte  $x_1 y_1$

$$2) \quad \delta = \frac{E}{4ab\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}}}.$$

Handelt es sich um eine kreisförmige Platte, so wird

$$3) \quad \delta = \frac{E}{4a^2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x_1^2 + y_1^2}{a^2}}} = \frac{E}{4a^2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}} = \frac{E}{4a\pi\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

Bei 2) und 3) folgt aus der Gleichung der Kurven für die Randlinie die Dichtigkeit  $\delta = \infty$ . Handelt es sich um eine gerade Linie von der Länge  $a$ , so schreibe man Gleichung 2) in der Form

$$\delta = \frac{E}{4a\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{b^2 - \frac{b^2 x_1^2}{a^2} - y_1^2}} = \frac{E}{4a\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{b^2 - \frac{b^2 x_1^2}{a^2} - \left(b^2 - \frac{x_1^2}{a^2} b^2\right)}} = \frac{E}{4a\pi} \cdot \frac{1}{0},$$

was einen unendlich großen Wert giebt. Dies ist naturgemäß, da jetzt die ganze Belegung sich auf der Randlinie befindet.

Macht man für die Formel 2) die elektrische Menge  $E_1 = E \cdot n$ , also  $n$  mal so groß und zugleich  $b_1 = nb$ , so erhält man

$$\delta = \frac{nE}{4a(nb)\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{n^2 b^2}}}.$$

Für großes  $n$  kann man dann  $\frac{y_1^2}{n^2 b^2}$  gleich Null setzen und erhält

$$4) \quad \delta = \frac{nE}{4a(nb)\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2}}} = \frac{E_1}{4ab_1\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2}}} = \frac{E_1}{4b_1\pi\sqrt{a^2 - x_1^2}}.$$

Jetzt ist die Dichte nur von  $x_1$  abhängig, d. h. es handelt sich um das in Nr. 194 und Fig. 140 dargestellte zweidimensionale Problem, welches auf konfokale Ellipsen und Hyperbeln bzw. deren Cylinder führt.

Für unsere Zwecke reicht es hin, daraus den Schluss zu ziehen, daß die Niveauflächen für den Fall 2) überhaupt konfokale Flächen zweiten Grades sind.

Influenzproblem. Man lege um eine elliptische Fläche eine konfokale Ellipse und durch ihre kleine Achse in normaler Ebene eine Ellipsenfläche, die ihre Brennpunkte in den Endpunkten der kleinen Achse der ersten Ellipse hat. Durch die beiden letzten Flächen läßt sich dann ein dreiaxsiges Ellipsoid legen, für welches die erste Ellipse die Fokalellipse ist.

Wird nun die Fläche der Fokalellipse mit der Elektrizität  $+E$  geladen, so sind nach obiger Bemerkung die Kraftlinien durch die Schnittkurven der konfokalen ein- und zweimanteligen Hyperboloide gegeben. Diese schneiden jedes der konfokalen Ellipsoide konfokal, beeinflussen also eine auf einem solchen bereits vorhandene Ladung nicht in ihrer Verteilung. War keine Ladung da, und leitet man die

Schale nach der Erde ab, so sammelt sich die Influenzelektrizität erster Ordnung  $-E$  in gleicher Quantität an und ordnet sich nach Vorschrift der Formel 1) an. Die Wirkungen von  $+E$  und  $-E$  nach außen heben sich auf. Beide Ladungen wirken also nach außen, vom Vorzeichen abgesehen, in gleicher Weise.

Für die Influenzelektrizität gilt aber die Formel  $p_1 = 4\pi\delta$  (vgl. Nr. 124), wo  $p_1$  die Anziehung des Kernkörpers bzw. seiner Belegung ist. Folglich:

Ladet man eine elliptische Fläche mit der Elektrizität  $E$ , so ist die Wirkung in jedem Raumpunkt  $x_1y_1z_1$  auf die Einheit

$$p = \frac{E}{abc} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4}}},$$

wo  $a, b, c$  die Hauptachsen des durch den Punkt gelegten Ellipsoids sind. Die Richtung von  $p$  ist normal gegen diese Fläche. Die Kraftröhren gehorchen bezüglich ihrer Querschnitte der Gleichung  $pF = p_1F_1$ .

Entsprechendes gilt von der Ladung jeder Ellipsoidfläche bzw. jedes ellipsoidischen Konduktors.

Nun kann man aber an Stelle der elektrischen Belegung eine Massenbelegung setzen, an Stelle der Dichte  $\delta$  die entsprechende Dicke  $d$  der Schale mit ähnlicher Begrenzung. Folglich, wenn die Gravitationskonstante  $\kappa = 1$  gesetzt wird:

Eine ähnlich begrenzte Ellipsoidschale von der homogen verteilten Masse  $m$  wirkt auf jeden Raumpunkt  $x_1y_1z_1$  in der Stärke

$$p = \frac{m}{abc} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4}}},$$

wo  $a, b, c$  die Halbachsen des durch den Punkt gelegten konfokalen Ellipsoids sind. Die Richtung ist normal gegen diese Fläche. Diese ist also Niveaufläche.

Hat man zwei Schalen, deren Außenflächen konfokale Ellipsoide sind, deren Innenflächen bzw. Dicken sich nach dem Gesetz der ähnlichen Begrenzung richten, so wirken beide nach außen identisch, wenn die Massen gleich sind, sie wirken im Verhältnis der Massen, wenn diese verschieden sind.

Dieser Satz gilt auch von zwei homogenen massiven Ellipsoiden (Mac Laurin).

Damit sind durch einfache physikalische Überlegungen Sätze der Gravitationstheorie (und Elektrostatik) abgeleitet, die von hervorragenden Analytikern entdeckt und von Chasles elementar bewiesen wurden. Näheres findet man bei Schell: Theorie der Bewegung und der Kräfte in dem Abschnitte Potential.

Die besonderen Fälle der Drehungsellipsoide, die der Belegung der Flächen von Fokalhyperbelen und von ein- und zweimanteligen Hyperboloiden lassen sich hieran anschließen. Dies sei jedoch dem Studium oder der eigenen Arbeit des Lesers überlassen.