



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung**

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik

**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig, 1898**

A. Die wichtigsten Einheiten der Mechanik.

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77934](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77934)

Wir setzen die Einheiten für die Zeit, die Länge und für die Masse als Grundeinheiten fest und leiten die übrigen daraus ab. Dabei wird sich aber zeigen, daß die Feststellung der Einheiten eine recht schwierige Aufgabe ist.

## A. Die wichtigsten Einheiten der Mechanik.

### a) Die Grundeinheiten.

#### 1) Die Zeiteinheit.

Die allgemein gebräuchliche Zeiteinheit ist die Sekunde. Sie ist eine der am schwierigsten zu bestimmenden Einheiten. Es handelt sich um den 86 400<sup>sten</sup> Teil des mittleren Sonnentages. Die Zeitdauer von einer Kulmination der Sonne zur andern wechselt nämlich im Laufe des Jahres ganz beträchtlich, erstens deshalb, weil sich die Sonnenentfernung ändert, zweitens deshalb, weil die Wanderung der Erde mit veränderlicher Geschwindigkeit vor sich geht. Daher ist der Unterschied zwischen dem Sonnentage und dem fast konstanten Sterntage bald größer, bald kleiner. Die mittlere Länge des Sonnentages erhält man, indem man die Zeit des tropischen Jahres, d. h. 366,2422 Sterntage in 365,2422 gleich lange mittlere Tage einteilt, so daß ein Sterntag gleich 23 Std. 56 Min. 4,091 Sek. mittlerer Zeit ist, dagegen ein mittlerer Tag = 24 Std. 3 Min. 56,555 Sek. Sternzeit. Der Unterschied zwischen wahrer und mittlerer Zeit ergibt sich aus der sogenannten Zeitgleichung, die uns sagt, um wie viel eine das ganze Jahr hindurch gleichmäßig und richtig gehende Uhr täglich falsch geht, ein bekanntes scheinbares Paradoxon. Vgl. Nr. 23.

Dazu kommt noch, daß die neuere Astronomie sogar die altehrwürdige Sekunde aus dem Reiche der Unveränderlichkeit verwiesen hat, da auch der Sterntag nicht konstant geblieben ist. Seit den Zeiten des Hipparch, also seit etwa 2000 Jahren, hat sich, wie aus der Theorie der Mondbewegung hervorgeht, der Sterntag um  $\frac{1}{81}$  Sek. verlängert, also die Erddrehung entsprechend verlangsamt. Der Hauptgrund dafür ergibt sich aus der feineren Theorie der Gezeiten (Ebbe und Flut). Vgl. Nr. 40. Außerdem würde auch die etwaige Erkaltung der Erde, aus der wahrscheinlich eine Zusammenziehung folgen müßte, auf die Drehungsgeschwindigkeit einwirken, und zwar beschleunigend. Streng genommen übt auch jeder Meteorsteinfall eine allerdings geringfügige Wirkung aus. Bei astronomischen Rechnungen, die sich, wie die Rückwärtsbestimmungen der Sonnenfinsternisse, auf Jahrtausende erstrecken können, summieren sich nun allerdings diese kleinen Unterschiede zu erheblichen Größen. Für technische Zwecke kann man

sich aber bei der obigen Definition der Sekunde beruhigen und gegebenenfalls jeder Spitzfindigkeit dadurch begegnen, daß man sie als den 86 400<sup>sten</sup> Teil des jetzigen mittleren Sonnentages erklärt. Sonstige Zeiteinheiten werden hier nicht zur Sprache kommen.

### 2) Die Längeneinheit.

In Frankreich wurde durch Beschluß vom 25. Juni 1800 der 10millionste Teil eines Quadranten des Erdmeridians als Einheit des Längenmaßes gesetzlich vorgeschrieben und zwar auf Grund von Messungen und Berechnungen (Laplace) über die Abplattung der Erde. Der deutsche Astronom Bessel hat nachträglich in den Rechnungen einen Fehler nachgewiesen, der das Meter um ein wenig zu klein gemacht hat. (In Wahrheit hat der Meridianumfang der Erde nicht 40 000 000 m, sondern 40 003 423 m, der Äquatorumfang 40 070 368 m). Ein Platinstab, der bei 0° C diese Länge angiebt, ist in Paris als Normalmeter aufbewahrt. Seit 1889 ist in Paris noch ein Platin-Iridiumstab, mit entsprechenden Marken versehen, aufbewahrt worden. Kopien befinden sich in den Archiven der Länder, die sich seit 1867 dem metrischen System angeschlossen haben. — Jedenfalls war es praktischer, dieses leicht zu kontrollierende Maß zu Grunde zu legen, als den Erdumfang, der auf jedem Meridian ein anderer sein kann (das Geoid ist durchaus kein genaues Drehungsellipsoid), und der sich außerdem bei jeder Senkung von Kontinenten und ebenso bei dem etwaigen Abkühlungsprozeß der Erde mit den Jahrtausenden ändern wird. Von Interesse ist aber, daß der Pariser Normalstab genau auf die Temperatur des schmelzenden Eises bei normalem Luftdruck gebracht werden muß, um das richtige Maß anzugeben, so daß in Wirklichkeit die Wärmemessung zur Kontrolle der Raummessung heranzuziehen ist. Die aus dem Meter decimal abgeleiteten Einheiten sollen als bekannt vorausgesetzt werden, ebenso die Flächen- und Raumeinheiten.

### 3) Die Masseneinheit.

Als Einheit der Masse ist von dem zur Regelung der elektrischen Einheiten nach Paris berufenen Kongreß am 21. September 1881 die Masse des als Gramm bekannten Gewichtsstückes angenommen worden. Es handelt sich um die Masse, die sich bezüglich der Anziehung durch die Erde an allen Orten ebenso verhält, wie die Masse eines Kubikcentimeters chemisch reinen Wassers im Zustande größter Dichtigkeit (fast genau 4° C). Also auch hier wird die Wärmemessung und sogar die Chemie zur Prüfung herangezogen. Auch für die Grammmasse hat man in Paris ein Urgramm aufbewahrt,

an dem sich die Messungen leichter bewerkstelligen lassen. Nach genauesten Messungen hat  $1 \text{ cm}^3$  Wasser 1,000013 Urgrammmassen.

In gleicher Weise wird aus dem Kubikmeter die Masse der Tonne, aus dem Kubikdecimeter die des Kilogramms, aus dem Kubikmillimeter die des Milligramms abgeleitet.

(Da diese Ausdrücke im praktischen Leben als Gewichte aufgefaßt werden, so soll hier stets, wenn es notwendig sein sollte, zwischen Massengramm und Gewichtsgramm u. s. w. geschieden werden.)

Aus den genannten drei Grundeinheiten läßt sich alles übrige ableiten.

Innerhalb des absoluten Maßsystems kommen also für die Physik und Technik im ganzen vier Möglichkeiten in Betracht:

- a) das Meter-Tonnen-Sekunden-System,
- b) das Decimeter-Kilogramm-Sekunden-System,
- c) das Centimeter-Gramm-Sekunden-System,
- d) das Millimeter-Milligramm-Sekunden-System.

Sämtliche sind gleichberechtigt, und mit der Einführung eines jeden von ihnen sind die übrigen miteingeführt, da ihre Maße sich untereinander nur um Potenzen von 10 unterscheiden. Man wird das eine oder das andere anwenden, je nachdem Großes oder Kleines zu messen ist.

Die Elektrotechnik hat das Centimeter-Gramm-Sekunden-System bereits eingeführt. Das auf noch kleinere Verhältnisse berechnete System unter d), welches von Gauß und Weber für die elektrischen Maßbestimmungen benutzt wurde, kann für die Technik außer acht bleiben.

#### b) Die abgeleiteten Einheiten.

1) Die Geschwindigkeit ist bei gleichförmiger Bewegung der auf die Sekunde zurückgeführte Weg, also

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}.$$

Ist die Bewegung ungleichmäÙig, so ist für jeden Augenblick der unendlich kleine Weg durch die unendlich kleine Zeit zu dividieren. Der Ausdruck giebt an, wie weit sich der Punkt bzw. Körper in einer Zeiteinheit bewegen würde, wenn von jetzt ab die Bewegung konstant sein würde. Jedenfalls wird stets eine Anzahl von Längeneinheiten durch eine Anzahl von Zeiteinheiten dividiert. Sind die beiden Zahlen gleich, so ist die Geschwindigkeit  $v = 1$ , d. h. gleich der Einheit der Geschwindigkeit. Der obige Ausdruck bedeutet also folgendes:

Anzahl der Geschwindigkeitseinheiten =  $\frac{\text{Anzahl der Längeneinheiten}}{\text{Anzahl der Zeiteinheiten}}$ .

Es ist also stes

$$v = \frac{l}{t} = lt^{-1}.$$

Man nennt den Ausdruck  $lt^{-1}$  die Dimension der Geschwindigkeit. Mit den Benennungen  $l$  und  $t$  wird ebenso gerechnet, wie mit arithmetischen Zahlen  $a, b, c, x$ , u. s. w.

2) Die Beschleunigung. Bewegt sich ein Körper so, daß seine Geschwindigkeit in gleichen Zeiteinheiten gleiche Zunahmen erfährt, so sagt man, die Beschleunigung sei eine gleichmäßige. Ist  $v_1$  die Anfangs-,  $v_2$  die Endgeschwindigkeit und dividiert man  $v_2 - v_1$  durch die Anzahl der Sekunden, d. h. durch  $t$ , so erhält man die Geschwindigkeitszunahme für die Zeiteinheit; sie ist

$$g = \frac{v_2 - v_1}{t}.$$

Ist die Beschleunigung ungleichförmig, so handelt es sich für jeden Augenblick um eine unendlich kleine Geschwindigkeitsdifferenz, dividiert durch eine unendlich kleine Zeit. Die Dimension der Beschleunigung ist zu erkennen aus

$$\frac{v}{t} = \frac{\left(\frac{l}{t}\right)}{t} = \frac{l}{t^2} = lt^{-2}.$$

Sind die Zahlen im Zähler und Nenner gleich, so wird  $g = 1$  und man hat die Einheit der Beschleunigung.

3) Die Kraft. Hat ein Körper die Masse  $m$  und wirkt auf ihn eine Kraft, die ihm, wenn keine Hindernisse vorhanden sind, in der Sekunde die Beschleunigung  $g$  giebt, so sagt man, die Größe der Kraft sei  $p = mg$ , also

Kraft = Masse mal Beschleunigung.

Ist  $m = 1$  und  $g = 1$ , so wird die Kraft gleich 1. Die Kräfteinheit ist also diejenige Kraft, die der Masse 1 in der Zeit 1 die Beschleunigung 1 erteilt. Im C. G. S.-System ist die Kräfteinheit die Kraft, die der Masse eines Gramms die Beschleunigung 1 cm erteilt. Diese Kraft wird nach Clausius Vorschlag als eine Dyne oder ein D $\ddot{y}$ n (von  $\delta\acute{\nu}\nu\alpha\iota\varsigma$ , Kraft) bezeichnet.

Die Schwerkraft giebt bei uns jedem Körper im luftleeren Raume die Beschleunigung 9,81 m = 981 cm. Das D $\ddot{y}$ n giebt ihm die Be-

schleunigung 1 cm, also ist die Krafteinheit Dyn der 981<sup>te</sup> Teil des alten Gewichtsgramms.

Die Dimension der Kraft ergibt sich aus  $m \cdot (lt^{-2}) = lmt^{-2}$ .

4) Die Arbeit. Wird eine Kraft  $p$  längs eines in ihrer Richtung liegenden Weges  $w$  überwunden, so sagt man, es sei die Arbeit  $A = pw$  geleistet worden. Also:

Arbeit = Kraft mal Kraftweg.

Ist  $p = 1$  und  $w = 1$ , so ist die Arbeit  $A = 1$ . Also:

Die Arbeitseinheit ist die Arbeit, die geleistet wird, wenn der Widerstand 1 Dyn längs des Weges 1 cm überwunden wird. Diese Arbeit wird nach Clausius als 1 Erg (von ἔργον, Werk) bezeichnet.

Die frühere Arbeitseinheit Meterkilogramm war gleich 100000 Centimetergramm, also, da jedes Gewichtsgramm gleich 981 Dyn ist,

$$1 \text{ mkg} = 981 \cdot 10^5 \text{ Dyn.}$$

Die Dimension der Arbeit ergibt sich aus  $pw$  als  $(mlt^{-2})l$  oder  $l^2mt^{-2}$ .

5) Die Leistung. Wird in  $t$  Sekunden gleichmäßig die Arbeit  $A$  geleistet, so kommt auf jede Sekunde die Leistung  $L = \frac{A}{t}$ . Unter Leistungsfähigkeit oder Leistung soll also stets die auf die Sekunde reduzierte Arbeit verstanden werden. Ist  $A = 1$  und  $t = 1$ , so hat man die Leistung 1. Also:

Die Einheit der Leistung ist die sekundliche Arbeit von der Größe eines Erg. Sie wird als Sekundenerg bezeichnet.

Die Pferdestärke der Technik bedeutet eine sekundliche Leistung von 75 Meterkilogramm, sie ist also gleich  $75 \cdot 10^5 \cdot 981$  Sekundenerg.

Die Dimension von  $L = \frac{A}{t}$  ergibt sich aus  $\frac{l^2mt^{-2}}{t}$  als  $l^2mt^{-3}$ .

Die sind die wichtigsten Einheiten der Mechanik.

Bisweilen sieht man sich veranlaßt, von einem der absoluten Maßsysteme zum andern überzugehen. Läßt man das Millimeter-Milligramm-Sekunden-System beiseite, und geht man vom C.G.S.-System nur zum Größeren, also zu dem in  $m$  über, so ergibt sich folgende Tabelle:

Die Längenmaße	verhalten sich wie	1 : 10 : 10 <sup>2</sup>
„ Flächenmaße	„ „ „	1 : 10 <sup>2</sup> : 10 <sup>4</sup>
„ Raummaße und	„ „ „	1 : 10 <sup>3</sup> : 10 <sup>6</sup>
„ Masseneinheiten		

Die Kraftmaße                    verhalten sich wie  $1 : 10^4 : 10^8$   
 „ Arbeitsmaße und }  
 „ Leistungsmaße    }        „        „        „  $1 : 10^5 : 10^{10}$ .

Durch diese Potenzen von 10 sind die sogenannten Verwandler gegeben. Sie lassen sich aus den Ausdrücken für die Dimensionen ableiten.

**Bemerkungen.** Die Elektriker haben auf dem Pariser Kongress eine Anzahl von Einheiten eingeführt, die leider aus dieser allgemeinen Tabelle heraustreten. Unter Megadyn (Großdyn) versteht man  $10^6$  Dyn, unter Mikrodyn (Kleindyn)  $10^{-6}$  Dyn. Ebenso ist das Megerg (Großerg) =  $10^6$  Erg, das Mikrerg (Kleinerger) =  $10^{-6}$  Erg. Ferner ist 1 Joule = 10 Megerg =  $10^7$  Erg, 1 Watt = 1 Sekunden-Joule =  $10^7$  Sekundenerg, so daß eine Pferdestärke abgerundet gleich 736 Watt ist.

**Aufgabe.** Für verschiedene Begriffe der Mechanik sollen die Dimensionen festgestellt werden.

Statisches Moment einer Kraft. Kraft mal Hebelarm gibt  $(lmt^{-2})l = l^2mt^{-2}$ . Vgl. Begriff der Arbeit.

Statisches Moment einer Masse. Masse mal Hebelarm gibt  $ml = lm$ .

Statisches Moment eines mathem. Körpers = (Inhalt  $l^3$ ) mal Hebelarm gibt  $l^3 \cdot l = l^4$ .

Statisches Moment einer mathem. Fläche = (Fläche  $l^2$ ) mal Hebelarm gibt  $l^2 \cdot l = l^3$ .

Statisches Moment einer mathem. Linie = (Länge  $l^1$ ) mal Hebelarm gibt  $l \cdot l = l^2$ .

Statisches Moment eines mathem. Punktes = ( $l^0$ ) mal Hebelarm gibt  $l^0 \cdot l = l^1$ .

Trägheitsmoment eines physischen Körpers (Masse).

Masse mal Quadrat des Trägheitsradius gibt  $ml^2 = l^2m$ .

Trägheitsmoment des mathem. Körpers gibt  $l^3 \cdot l^2 = l^5$ .

„                    der                    „                    Fläche                    „                     $l^2 \cdot l^2 = l^4$ .

„                    „                    „                    Linie                    „                     $l \cdot l^2 = l^3$ .

„                    des                    „                    Punktes                    „                     $l^0 \cdot l^2 = l^2$ .

Flächendruck =  $\frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$  gibt  $\frac{lmt^{-2}}{l^2} = l^{-1}mt^{-2}$  z. B. Zugspannung,

Druckspannung, Tragmodul, Elastizitätsmodul, hydrostatischer Bodendruck, Seitendruck, Dampfdruck und dgl., alles auf die Flächeneinheit reduziert.

Dichte =  $\frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}}$  gibt  $\frac{m}{l^3} = l^{-3}m$ .

Widerstandsmoment einer Fläche (Querschnittsmodul) also  $\frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{Abstand}}$  giebt  $\frac{l^4}{l} = l^3$ .

Gravitationskonstante. Aus  $p = \kappa \frac{m \cdot m_1}{r^2} = \text{Kraft}$  folgt  $\kappa = \frac{pr^2}{mm_1}$ .

Dies giebt  $\frac{(lmt^{-2})l^3}{m^2} = l^3m^{-1}t^{-2}$ .

Potential zwischen zwei Körpern  $\frac{mm_1}{r} = \frac{pr}{\kappa}$  giebt  $l^{-1}m^2$ .

Bei Berücksichtigung von  $\kappa$  erhält man  $\kappa \frac{mm_1}{r}$ , was die Dimension einer Arbeit giebt, denn  $(l^3m^{-1}t^{-2}) \cdot \frac{m^2}{l} = l^2mt^{-2}$ .

Potentialfunktion. Aus  $\frac{m}{r}$  folgt als Dimension  $l^{-1}m$ . Dabei ist

die Dimension von  $\kappa$  und die der angezogenen Masseneinheit vernachlässigt. Oft wird diese Funktion kurz als Potential bezeichnet.

**Bemerkung.** Gleichungen der Mechanik müssen beiderseits homogen oder äquivalent sein, d. h. die Dimensionen müssen rechts und links übereinstimmen oder sich durcheinander ersetzen lassen (z. B. Wärmeinheit = 425 mkg, also  $W = l^2mt^{-2}$ ).

**Beispiel:** Die Traggleichung für Biegefestigkeit  $Pl = SZ$  hat links statisches Moment  $l^2mt^{-2}$ , rechts Spannung mal Widerstandsmoment, also  $(l^{-1}mt^{-2})l^3 = l^2mt^{-2}$ . Beides stimmt überein.

**Bemerkung.** 1 Cal =  $4,2 \cdot 10^7$  Erg; 1 Erg =  $2,4 \cdot 10^{-8}$  Cal.; 1 Watt =  $10^7$  Sek. Erg = 0,24 Cal. auf die Sekunde = 0,00136 Pferdestärke.

## B. Die Einheiten des Magnetismus und ihre Dimensionen.

### 1) Magnetische Menge.

Die magnetischen Kräfte gehorchen der Gleichung  $p = \kappa \frac{\mu_1 \mu_2}{r^2}$ .

Links steht die Anziehungs- oder Abstofsungskraft. Rechts bedeuten  $\mu_1$  und  $\mu_2$  nicht ponderable, sondern magnetische Massen und Mengen. Man kann ihre Einheiten so bestimmen, daß  $\kappa = 1$  ist. Dann wird

$\frac{\mu_1 \mu_2}{r^2} = p$ , also  $\mu_1 \mu_2 = pr^2$ . Sind die Mengen gleich, so folgt  $\mu^2 = pr^2$ ,

also  $\mu = r\sqrt{p}$ . Die Dimension der magnetischen Masse ist also zu bestimmen aus  $l\sqrt{lmt^{-2}}$ . Dies giebt als Dimension der magne-

tischen Menge  $\mu$  den Ausdruck  $l^{\frac{3}{2}}m^{\frac{1}{2}}t^{-1}$ . Dieser auf den ersten Blick wegen seiner Kompliziertheit befremdende Ausdruck ist dadurch entstanden, daß man, um einfacher rechnen zu können, sich geeinigt hat, die Dimension der Konstanten  $\kappa$  zu vernachlässigen.  $\mu$  wird auch Polstärke eines Magneten genannt.