Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

b) Die abgeleiteten Einheiten

an dem sich die Messungen leichter bewerkstelligen lassen. Nach genauesten Messungen hat 1 cm^3 Wasser 1,000013 Urgrammmassen.

In gleicher Weise wird aus dem Kubikmeter die Masse der Tonne, aus dem Kubikdecimeter die des Kilogramms, aus dem Kubikmillimeter die des Milligramms abgeleitet.

(Da diese Ausdrücke im praktischen Leben als Gewichte aufgefafst werden, so soll hier stets, wenn es notwendig sein sollte, zwischen Massengramm und Gewichtsgramm u. s. w. geschieden werden.)

Aus den genannten drei Grundeinheiten läfst sich alles übrige ableiten.

Innerhalb des absoluten Mafssystems kommen also für die Physik und Technik im ganzen vier Möglichkeiten in Betracht:

a) das Meter-Tonnen-Sekunden-System,
b) das Decimeter-Kilogramm-Sekunden-System,
c) das Centimeter-Gramm-Sekunden-System,
d) das Millimeter-Milligramm-Sekunden-System.

Sämtliche sind gleichberechtigt, und mit der Einführung eines jeden von ihnen sind die übrigen miteingeführt, da ihre Mafse sich untereinander nur um Potenzen von 10 unterscheiden. Man wird das eine oder das andere anwenden, je nachdem Grofses oder Kleines zu messen ist.

Die Elektrotechnik hat das Centimeter-Gramm-Sekunden-System bereits eingeführt. Das auf noch kleinere Verhältnisse berechnete System unter d), welches von Gaufs und Weber für die elektrischen Mafsbestimmungen benutzt wurde, kann für die Technik aufser acht bleiben.

b) Die abgeleiteten Einheiten.

1) Die Geschwindigkeit ist bei gleichförmiger Bewegung der auf die Sekunde zurückgeführte Weg, also

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}.$$

Ist die Bewegung ungleichmäfsig, so ist für jeden Augenblick der unendlich kleine Weg durch die unendlich kleine Zeit zu dividieren. Der Ausdruck giebt an, wie weit sich der Punkt bezw. Körper in einer Zeiteinheit bewegen würde, wenn von jetzt ab die Bewegung konstant sein würde. Jedenfalls wird stets eine Anzahl von Längeneinheiten durch eine Anzahl von Zeiteinheiten dividiert. Sind die beiden Zahlen gleich, so ist die Geschwindigkeit $v = 1$, d. h. gleich der Einheit der Geschwindigkeit. Der obige Ausdruck bedeutet also folgendes:

$$\text{Anzahl der Geschwindigkeitseinheiten} = \frac{\text{Anzahl der Längeneinheiten}}{\text{Anzahl der Zeiteinheiten}}.$$

Es ist also stes

$$v = \frac{l}{t} = lt^{-1}.$$

Man nennt den Ausdruck lt^{-1} die Dimension der Geschwindigkeit. Mit den Benennungen l und t wird ebenso gerechnet, wie mit arithmetischen Zahlen a, b, c, x, u. s. w.

2) Die Beschleunigung. Bewegt sich ein Körper so, daſs seine Geschwindigkeit in gleichen Zeitteilchen gleiche Zunahmen erfährt, so sagt man, die Beschleunigung sei eine gleichmäſsige. Ist v_1 die Anfangs-, v_2 die Endgeschwindigkeit und dividiert man $v_2 - v_1$ durch die Anzahl der Sekunden, d. h. durch t, so erhält man die Geschwindigkeitszunahme für die Zeiteinheit; sie ist

$$g = \frac{v_2 - v_1}{t}.$$

Ist die Beschleunigung ungleichförmig, so handelt es sich für jeden Augenblick um eine unendlich kleine Geschwindigkeitsdifferenz, dividiert durch eine unendlich kleine Zeit. Die Dimension der Beschleunigung ist zu erkennen aus

$$\frac{v}{t} = \frac{\left(\frac{l}{t}\right)}{t} = \frac{l}{t^2} = lt^{-2}.$$

Sind die Zahlen im Zähler und Nenner gleich, so wird $g = 1$ und man hat die Einheit der Beschleunigung.

3) Die Kraft. Hat ein Körper die Masse m und wirkt auf ihn eine Kraft, die ihm, wenn keine Hindernisse vorhanden sind, in der Sekunde die Beschleunigung g giebt, so sagt man, die Gröſse der Kraft sei $p = mg$, also

Kraft = Masse mal Beschleunigung.

Ist $m = 1$ und $g = 1$, so wird die Kraft gleich 1. Die Krafteinheit ist also diejenige Kraft, die der Masse 1 in der Zeit 1 die Beschleunigung 1 erteilt. Im C. G. S.-System ist die Krafteinheit die Kraft, die der Masse eines Gramms die Beschleunigung 1 cm erteilt. Diese Kraft wird nach Clausius Vorschlag als eine Dyne oder ein Dyn (von δύναμις, Kraft) bezeichnet.

Die Schwerkraft giebt bei uns jedem Körper im luftleeren Raume die Beschleunigung 9,81 m = 981 cm. Das Dyn giebt ihm die Beschleunigung 1 cm, also ist die Krafteinheit Dyn der 981[te] Teil des alten Gewichtsgramms.

Die Dimension der Kraft ergiebt sich aus $m \cdot (lt^{-2}) = lmt^{-2}$.

4) Die Arbeit. Wird eine Kraft p längs eines in ihrer Richtung liegenden Weges w überwunden, so sagt man, es sei die Arbeit $A = pw$ geleistet worden. Also:

Arbeit = Kraft mal Kraftweg.

Ist $p = 1$ und $w = 1$, so ist die Arbeit $A = 1$. Also:

Die Arbeitseinheit ist die Arbeit, die geleistet wird, wenn der Widerstand 1 Dyn längs des Weges 1 cm überwunden wird. Diese Arbeit wird nach Clausius als 1 Erg (von ἔργον, Werk) bezeichnet.

Die frühere Arbeitseinheit Meterkilogramm war gleich 100000 Centimetergramm, also, da jedes Gewichtsgramm gleich 981 Dyn ist,

$$1 \text{ mkg} = 981 \cdot 10^5 \text{ Dyn}.$$

Die Dimension der Arbeit ergiebt sich aus pw als $(mlt^{-2})\,l$ oder l^2mt^{-2}.

5) Die Leistung. Wird in t Sekunden gleichmäſsig die Arbeit A geleistet, so kommt auf jede Sekunde die Leistung $L = \frac{A}{t}$. Unter Leistungsfähigkeit oder Leistung soll also stets die auf die Sekunde reduzierte Arbeit verstanden werden. Ist $A = 1$ und $t = 1$, so hat man die Leistung 1. Also:

Die Einheit der Leistung ist die sekundliche Arbeit von der Gröſse eines Erg. Sie wird als Sekundenerg bezeichnet.

Die Pferdestärke der Technik bedeutet eine sekundliche Leistung von 75 Meterkilogramm, sie ist also gleich $75 \cdot 10^5 \cdot 981$ Sekundenerg.

Die Dimension von $L = \frac{A}{t}$ ergiebt sich aus $\frac{l^2mt^{-2}}{t}$ als l^2mt^{-3}.

Die sind die wichtigsten Einheiten der Mechanik.

Bisweilen sieht man sich veranlaſst, von einem der absoluten Maſssysteme zum andern überzugehen. Läſst man das Millimeter-Milligramm-Sekunden-System beiseite, und geht man vom C.G.S.-System nur zum Gröſseren, also zu dem in m über, so ergiebt sich folgende Tabelle:

Die Längenmaſse	verhalten sich wie	$1 : 10 : 10^2$
„ Flächenmaſse	„ „ „	$1 : 10^2 : 10^4$
„ Raummaſse und „ Masseneinheiten	„ „ „	$1 : 10^3 : 10^6$

Die Kraftmaſse	verhalten sich wie	$1 : 10^4 : 10^8$
„ Arbeitsmaſse und „ Leistungsmaſse	„ „ „	$1 : 10^5 : 10^{10}$.

Durch diese Potenzen von 10 sind die sogenannten Verwandler gegeben. Sie lassen sich aus den Ausdrücken für die Dimensionen ableiten.

Bemerkungen. Die Elektriker haben auf dem Pariser Kongreſs eine Anzahl von Einheiten eingeführt, die leider aus dieser allgemeinen Tabelle heraustreten. Unter Megadyn (Groſsdyn) versteht man 10^6 Dyn, unter Mikrodyn (Kleindyn) 10^{-6} Dyn. Ebenso ist das Megerg (Groſserg) $= 10^6$ Erg, das Mikrerg (Kleinerg) $= 10^{-6}$ Erg. Ferner ist 1 Joule $= 10$ Megerg $= 10^7$ Erg, 1 Watt $= 1$ Sekunden-Joule $= 10^7$ Sekundenerg, so daſs eine Pferdestärke abgerundet gleich 736 Watt ist.

Aufgabe. Für verschiedene Begriffe der Mechanik sollen die Dimensionen festgestellt werden.

Statisches Moment einer Kraft. Kraft mal Hebelarm giebt $(lmt^{-2})\, l = l^2mt^{-2}$. Vgl. Begriff der Arbeit.

Statisches Moment einer Masse. Masse mal Hebelarm giebt $ml = lm$.

Statisches Moment eines mathem. Körpers $=$ (Inhalt l^3) mal Hebelarm giebt $l^3 \cdot l = l^4$.

Statisches Moment einer mathem. Fläche $=$ (Fläche l^2) mal Hebelarm giebt $l^2 \cdot l = l^3$.

Statisches Moment einer mathem. Linie $=$ (Länge l^1) mal Hebelarm giebt $l \cdot l = l^2$.

Statisches Moment eines mathem. Punktes $=$ (l^0) mal Hebelarm giebt $l^0 \cdot l = l^1$.

Trägheitsmoment eines physischen Körpers (Masse). Masse mal Quadrat des Trägheitsradius giebt $ml^2 = l^2m$.

Trägheitsmoment	des	mathem.	Körpers	giebt	$l^3 \cdot l^2 = l^5$.
„	der	„	Fläche	„	$l^2 \cdot l^2 = l^4$.
„	„	„	Linie	„	$l \cdot l^2 = l^3$.
„	des	„	Punktes	„	$l^0 \cdot l^2 = l^2$.

Flächendruck $= \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$ giebt $\frac{lmt^{-2}}{l^2} = l^{-1}mt^{-2}$ z. B. Zugspannung, Druckspannung, Tragmodul, Elastizitätsmodul, hydrostatischer Bodendruck, Seitendruck, Dampfdruck und dgl., alles auf die Flächeneinheit reduziert.

Dichte $= \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}}$ giebt $\frac{m}{l^3} = l^{-3}m$.

Widerstandsmoment einer Fläche (Querschnittsmodul) also $\frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{Abstand}}$ giebt $\frac{l^4}{l} = l^3$.

Gravitationskonstante. Aus $p = \varkappa \frac{m \cdot m_1}{r^2}$ = Kraft folgt $\varkappa = \frac{pr^2}{mm_1}$.

Dies giebt $\frac{(lmt^{-2})\, l^2}{m^2} = l^3 m^{-1} t^{-2}$.

Potential zwischen zwei Körpern $\frac{mm_1}{r} = \frac{pr}{\varkappa}$ giebt $l^{-1} m^2$.

Bei Berücksichtigung von $\varkappa$ erhält man $\varkappa \frac{mm_1}{r}$, was die Dimension einer Arbeit giebt, denn $(l^3 m^{-1} t^{-2}) \cdot \frac{m^2}{l} = l^2 m t^{-2}$.

Potentialfunktion. Aus $\frac{m}{r}$ folgt als Dimension $l^{-1} m$. Dabei ist die Dimension von $\varkappa$ und die der angezogenen Masseneinheit vernachlässigt. Oft wird diese Funktion kurz als Potential bezeichnet.

Bemerkung. Gleichungen der Mechanik müssen beiderseits homogen oder äquivalent sein, d. h. die Dimensionen müssen rechts und links übereinstimmen oder sich durcheinander ersetzen lassen (z. B. Wärmeeinheit = 425 mkg, also $W = l^2 m t^{-2}$).

Beispiel: Die Traggleichung für Biegungsfestigkeit $Pl = SZ$ hat links statisches Moment $l^2 m t^{-2}$, rechts Spannung mal Widerstandsmoment, also $(l^{-1} m t^{-2})\, l^3 = l^2 m t^{-2}$. Beides stimmt überein.

Bemerkung. 1 Cal = $4{,}2 \cdot 10^7$ Erg; 1 Erg = $2{,}4 \cdot 10^{-8}$ Cal.; 1 Watt = 10^7 Sek. Erg = 0,24 Cal. auf die Sekunde = 0,00136 Pferdestärke.

B. Die Einheiten des Magnetismus und ihre Dimensionen.

1) Magnetische Menge.

Die magnetischen Kräfte gehorchen der Gleichung $p = \varkappa \frac{\mu_1 \mu_2}{r^2}$. Links steht die Anziehungs- oder Abstofsungskraft. Rechts bedeuten μ_1 und μ_2 nicht ponderable, sondern magnetische Massen und Mengen. Man kann ihre Einheiten so bestimmen, dafs $\varkappa = 1$ ist. Dann wird $\frac{\mu_1 \mu_2}{r^2} = p$, also $\mu_1 \mu_2 = pr^2$. Sind die Mengen gleich, so folgt $\mu^2 = pr^2$, also $\mu = r\sqrt{p}$. Die Dimension der magnetischen Masse ist also zu bestimmen aus $l\sqrt{lmt^{-2}}$. Dies giebt als Dimension der magnetischen Menge μ den Ausdruck $l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$. Dieser auf den ersten Blick wegen seiner Kompliziertheit befremdende Ausdruck ist dadurch entstanden, dafs man, um einfacher rechnen zu können, sich geeinigt hat, die Dimension der Konstanten $\varkappa$ zu vernachlässigen. μ wird auch Polstärke eines Magneten genannt.