Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

B. Die Einheiten des Magnetismus und ihre Dimensionen

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

Widerstandsmoment einer Fläche (Querschnittsmodul) also $\frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{Abstand}}$ giebt $\frac{l^4}{l} = l^3$.

Gravitationskonstante. Aus $p = \varkappa \frac{m \cdot m_1}{r^2}$ = Kraft folgt $\varkappa = \frac{pr^2}{mm_1}$.

Dies giebt $\frac{(lmt^{-2})\, l^2}{m^2} = l^3 m^{-1} t^{-2}$.

Potential zwischen zwei Körpern $\frac{mm_1}{r} = \frac{pr}{\varkappa}$ giebt $l^{-1} m^2$.

Bei Berücksichtigung von $\varkappa$ erhält man $\varkappa \frac{mm_1}{r}$, was die Dimension einer Arbeit giebt, denn $(l^3 m^{-1} t^{-2}) \cdot \frac{m^2}{l} = l^2 m t^{-2}$.

Potentialfunktion. Aus $\frac{m}{r}$ folgt als Dimension $l^{-1} m$. Dabei ist die Dimension von $\varkappa$ und die der angezogenen Masseneinheit vernachlässigt. Oft wird diese Funktion kurz als Potential bezeichnet.

Bemerkung. Gleichungen der Mechanik müssen beiderseits homogen oder äquivalent sein, d. h. die Dimensionen müssen rechts und links übereinstimmen oder sich durcheinander ersetzen lassen (z. B. Wärmeeinheit = 425 mkg, also $W = l^2 m t^{-2}$).

Beispiel: Die Traggleichung für Biegungsfestigkeit $Pl = SZ$ hat links statisches Moment $l^2 m t^{-2}$, rechts Spannung mal Widerstandsmoment, also $(l^{-1} m t^{-2})\, l^3 = l^2 m t^{-2}$. Beides stimmt überein.

Bemerkung. 1 Cal = 4,2 · 10^7 Erg; 1 Erg = 2,4 · 10^{-8} Cal.; 1 Watt = 10^7 Sek. Erg = 0,24 Cal. auf die Sekunde = 0,00136 Pferdestärke.

B. Die Einheiten des Magnetismus und ihre Dimensionen.

1) Magnetische Menge.

Die magnetischen Kräfte gehorchen der Gleichung $p = \varkappa \frac{\mu_1 \mu_2}{r^2}$. Links steht die Anziehungs- oder Abstofsungskraft. Rechts bedeuten μ_1 und μ_2 nicht ponderable, sondern magnetische Massen und Mengen. Man kann ihre Einheiten so bestimmen, dafs $\varkappa = 1$ ist. Dann wird $\frac{\mu_1 \mu_2}{r^2} = p$, also $\mu_1 \mu_2 = pr^2$. Sind die Mengen gleich, so folgt $\mu^2 = pr^2$, also $\mu = r\sqrt{p}$. Die Dimension der magnetischen Masse ist also zu bestimmen aus $l\sqrt{lmt^{-2}}$. Dies giebt als Dimension der magnetischen Menge μ den Ausdruck $l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$. Dieser auf den ersten Blick wegen seiner Kompliziertheit befremdende Ausdruck ist dadurch entstanden, dafs man, um einfacher rechnen zu können, sich geeinigt hat, die Dimension der Konstanten $\varkappa$ zu vernachlässigen. μ wird auch Polstärke eines Magneten genannt.

Ist in $\mu = r\sqrt{p}$ $r = 1$ und $p = 1$, so wird $\mu = 1$.

Die magnetische Masseneinheit ist also diejenige magnetische Menge, die auf eine gleich grofse Menge in Entfernung 1 cm die Kraft 1 Dyn ausübt. Die Menge von 10^8 solcher Einheiten heifst zu Ehren des berühmten Physikers ein Weber.

2) Magnetische Potentialfunktion einer Masse. $V = \frac{\mu}{r}$ $= \frac{\text{magnetische Masse}}{\text{Entfernung}}$ giebt $\frac{l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}}{l}$ oder als Dimension $l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$.

Hier sind dieselben Vereinfachungen vorgenommen wie beim Gravitationspotential bezw. seiner Funktion. Ist $m = 1$ und $r = 1$, so wird $V = 1$. Dadurch ist die Potentialeinheit definiert.

3) Magnetisches Potential zwischen zwei Massen. (Magnetische Energie).

$$\frac{\mu_1}{r} \cdot \mu_2 \text{ giebt } (l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1})\, l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1} = l^2 m t^{-2}.$$

Dies ist die Dimension einer Arbeit, der Name Energie ist also berechtigt. Zwischen zwei magnetischen Masseneinheiten herrscht in der Entfernung von 1 cm das Potential 1, d. h. es ist ein Erg Arbeit nötig, um die eine aus der Entfernung 1 von der festgehaltenen andern in unendliche Entfernung zu schaffen.

4) Potentialgefälle $= \frac{\text{Potentialdifferenz}}{\text{Abstand der Niveauflächen}}$ giebt $\frac{l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}}{l}$ (bezogen auf Einheit) oder die Dimension $l^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$.

5) Feldstärke F in einem Punkte = Kraft, die ein Pol auf die in diesem Punkte befindliche magnetische Einheit ausübt. Dimension folgt aus $\frac{\text{Kraft}}{\text{magn. Menge}} = \frac{l m t^{-2}}{l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}} = l^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$.

4) und 5) sind identisch, 5) ist die Erklärung von 4). Aus 5) folgt $F \cdot \mu$ = Feldstärke mal magn. Menge gleich Kraft; Potentialgefälle gleich der auf die magnetische Einheit ausgeübten Kraft.

6) Magnetisches Moment eines Magnets = Polstärke mal Länge des Magnets. Dimension $= \mu \cdot l = \left(l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}\right) l = l^{\frac{5}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$.

7) Drehmoment eines Magnets von Polstärke μ und Länge l im homogenen Felde (z. B. dem des Erdmagnetismus) von Feldstärke F.

Es ist gleich $F \cdot \mu \cdot l \sin \alpha$, wenn der Stab mit der Kraftrichtung des Feldes den Winkel α bildet. Der Höchstwert ist $F\mu l$. Dimension $= \left(l^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}\right)\left(l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}\right) l = l^2 m t^{-2}$. (Vgl. Stat. Moment der Mechanik.)

8) Schwingungsdauer des Magnets im homog. magn. Felde $= 2\pi \sqrt{\frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{Drehmoment}}}$; Dimension ist $\sqrt{\frac{m l^2}{l^2 m t^{-2}}} = \sqrt{t^2} = t$, wie zu erwarten war.

9) Spezifischer Magnetismus $= \frac{\text{Magn. Moment}}{\text{Masse}} = \frac{l^{\frac{5}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}}{m}$ $= l^{\frac{5}{2}} m^{-\frac{1}{2}} t^{-1}$.

10) Intensität der Magnetisierung $= \frac{\text{Magn. Moment}}{\text{Volumen}} = \frac{l^{\frac{5}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}}{l^3}$ $= l^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$.

11) Zahl der Kraftlinien = Feldstärke mal Fläche $= \left(l^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}\right) l^2$ $= l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$.

C. Einheiten der Elektrostatik.

1) Elektrische Menge. Sie wird, wie die des Magnetismus, aus $p = \varkappa \frac{\mu_1 \mu_2}{r^2}$ für $\varkappa = 1$ abgeleitet. Ihre Dimension ist also ebenfalls $l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$.

Einheit der elektrischen Menge ist diejenige Menge, die auf eine gleich grofse in der Entfernung 1 cm die Anziehung 1 Dyn ausübt.

Die praktische Einheit der Elektrotechnik umfafst $3 \cdot 10^9$ solche Einheiten und heifst ein Coulomb.

2) Elektrische Potentialfunktion $= \frac{\mu}{r}$ giebt, wie beim Magnetismus, als Dimension $l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$. Definition der Potentialeinheit: Ist $\mu = 1$ und $r = 1$, so ist das Potential $= 1$.

3) Elektrisches Potential in Bezug auf zwei Massen $\frac{\mu \cdot \mu_1}{r}$ hat die Dimension $\left(l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}\right)\left(l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}\right) = l^2 m t^{-2}$, es bedeutet also eine Arbeit.

Ist $\mu = 1$, $\mu_1 = 1$ und $r = 1$, so kostet es die Arbeit 1, die eine der Mengen unter Festhaltung der andern ins Unendliche zu ent-