Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

D. Elektrostatische Einheiten für galvanische Ströme

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

fernen. Die zur Überwindung eines Potentialunterschiedes 1 (durch Fortbewegung der elektrischen Menge 1) nötige Arbeit ist ein Erg. Handelt es sich um die Arbeit $\frac{1}{3\cdot 10^2}$ Erg, so heifst der Potentialunterschied ein Volt.

4) Dimension der Dichte $\delta = \frac{\text{Ladung}}{\text{Fläche}}$ ist $\frac{\mu}{l^2} = \frac{m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-1}}{l^2} = l^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$.

5) Oberflächenspannung $2\pi\delta^2$ hat die Dimension $\delta^2 = l^{-1} m t^{-2}$.

6) Kapazität eines Leiters ist die Ladung, die sein Potential um 1 erhöht, also Ladung reduziert auf die Einheit des Potentials d. h.

$$\text{Kapazität} = \frac{\text{Ladung}}{\text{Potential}} = \frac{m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-1}}{l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}} = l$$

Ist ein Coulomb Ladung nötig, um das Potential um 1 zu erhöhen, so nennt man die Kapazität ein Farad.

$$1 \text{ Farad} = \frac{1 \text{ Coulomb}}{1 \text{ Volt}} = \frac{3\cdot 10^9}{\frac{1}{3\cdot 10^2}} \text{ oder } 9\cdot 10^{11} \text{ absolute Einheiten.}$$

7) Energie der Ladung $= \frac{1}{2} V\cdot\mu$, Dim. $= \left(l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}\right)\left(m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-1}\right) = l^2 m t^{-2}$, also die Dimension einer Arbeit. Vgl. Nr. 3.

8) Dimension der Dielektrizitätskonstante $= \frac{\text{Kap.}}{\text{Kap.}} = l^0 m^0 t^0$.

D. Erläuterung des galvanischen Stromes und seiner Gesetze, nebst Ableitung der Einheiten und ihrer Dimensionen.

Hat ein homogener Draht die Länge 1, den Querschnitt 1, und ist die Potentialdifferenz zwischen Anfangs- und Endpol, deren Bedeutung noch näher besprochen werden soll, gleich Eins, so braucht die Einheit der Elektrizitätsmenge, um einen der Querschnitte zu passieren, eine gewisse Zeit ϱ, die konstant ist, wenn die Strömung den Charakter einer stationären Strömung hat. Diese Zeit hängt von der chemischen Beschaffenheit, d. h. vom Material des Drahtes ab und steht in enger Beziehung zu der Geschwindigkeit der Elektrizität im Drahte. Die Dimension von ϱ ist t.

Folglich: In jeder Sekunde passiert durch jeden Querschnitt 1 eine Elektrizitätsmenge $\lambda = \frac{1}{\varrho}\cdot$ Ihre Dimension ist $\frac{1}{t}$ oder t^{-1}.

Man bezeichnet ϱ, weil es auf lauter Einheiten bezogen ist, als den spezifischen Widerstand des Drahtes; λ heifst sein Leitungskoeffizient oder das spezifische Leitungsvermögen.

Der spezifische Widerstand wird also gemessen durch die Zeit, die bei der Potentialdifferenz 1 nötig ist, um in einem Drahte von Länge 1 und Querschnitt 1 die elektrische Menge 1 durch jeden Querschnitt passieren zu lassen.

Der Leitungskoeffizient giebt an, welche Menge Elektrizität dabei in jeder Sekunde durch jeden Querschnitt geht.

Hat nun der Stab die $l$fache Länge, so ist ein $l$facher Widerstand zu überwinden, und daher geht, wie das Ohmsche Gesetz sagt, nur der l^{te} Teil der Elektrizitätsmenge λ durch jeden Querschnitt 1, sobald die Potentialdifferenz dieselbe ist. Aus dem Potentialgefälle $\frac{1}{1}$ ist eben $\frac{1}{l}$ geworden, aus der Menge λ wird daher $\frac{\lambda}{l}$.

Giebt man ferner dem Drahte den Ffachen Querschnitt, so wandert naturgemäfs in jeder Sekunde die Ffache Elektrizitätsmenge $\frac{\lambda}{l} F$ durch jeden Stabquerschnitt.

Ist endlich die Potentialdifferenz zwischen den Endpunkten nicht 1, sondern $D = V_1 - V_2$, die Anziehung jedes Poles auf die entgegengesetzte elektrische Einheit also D mal so grofs, als vorher, so geht in jeder Sekunde im Einklang mit dem Ohmschen Gesetz die Dfache Elektrizitätsmenge durch jeden Querschnitt, wie vorher, nämlich die Menge

$$J = \frac{\lambda}{l} F (V_1 - V_2).$$

Um zu sehen, ob diese Angaben dem Begriffe der Elektrizitätsmenge entsprechen, setze man an Stelle dieser Ausdrücke die bekannten Dimensionen. Man erhält als Dimension von J

$$\frac{t^{-1}}{l} l^2 . \left(l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}\right) \quad \text{oder} \quad l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-2}.$$

Nun hatte aber die Elektrizitätsmenge die Dimension $l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$, hier steht also in der That $\frac{\text{Elektrizitätsmenge}}{\text{Zeit}}$, d. h. die sekundlich passierende Elektrizitätsmenge.

Man nennt den gefundenen Ausdruck die Stromstärke oder Intensität, so dafs

$$J = \frac{\lambda}{l} F (V_1 - V_2) = \lambda F \frac{V_1 - V_2}{l} = \lambda F G$$

ist, wo G das Potentialgefälle $\frac{V_1 - V_2}{l}$ für die Drahtlänge l bedeutet.

Die Stromstärke also ist die Menge von Elektrizität, die sekundlich durch jeden Querschnitt des Drahtes geht.

Sie ist proportional dem Leitungskoeffizienten λ, dem Querschnitte F, der Potentialdifferenz, und umgekehrt proportional der Länge des Drahtes; oder, sie ist proportional dem Leitungskoeffizienten, dem Querschnitte und dem Potentialgefälle.

Ist $J = \lambda F G = 1$, so sagt man, der Strom habe die Stärke 1 (C. G. S.-System). Ist $J = 3 \cdot 10^9$, d. h. passiert in jeder Sekunde durch F ein Coulomb $= 3 \cdot 10^9$ C. G. S.-Einheiten Elektrizitätsmenge, so sagt man, der Strom habe die Stärke 1 Ampère. Die Anzahl der Ampère giebt also an, wieviel Coulomb in jeder Sekunde durch jeden Querschnitt passieren. Es ist 1 Ampère = 1 Sekunden-Coulomb. Man merke also:

Anzahl der Ampère = Anzahl der Coulomb auf die Sekunde $= \frac{\text{Menge}}{\text{Zeit}}$.

Ampère mal Zeit giebt die Elektrizitätsmenge. So kann man die Ladung eines Akkumulators gleich n Ampèrestunden setzen.

Um auch für die Potentialdifferenz etwas Greifbares zu erhalten, untersuche man das Produkt $(V_1 - V_2)\,J$ in Bezug auf seine Dimensionen. Man erhält

$$\left(l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}\right) \cdot \left(l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-2}\right) = l^2 m t^{-3} = \frac{l^2 m t^{-2}}{t}.$$

Dies ist die Dimension einer Leistung oder einer sekundlichen Arbeit. Also:

Das Produkt aus Potentialdifferenz und Stromstärke ist äquivalent einer mechanischen Arbeitsleistung auf die Sekunde.

Folglich:

$$\text{Potentialdifferenz} = \frac{\text{Arbeit auf die Sekunde}}{\text{Elektrizitätsmenge auf die Sekunde}}$$

$$= \frac{\text{Arbeit in } t \text{ Sekunden}}{\text{Elektrizitätsmenge in } t \text{ Sekunden}} = \frac{\text{Stromarbeit}}{\text{Elektrizitätsmenge}},$$

letzteres für beliebige Zeit.

Man kann also die Potentialdifferenz deuten als die Stromarbeit, reduziert auf die Einheit der Elektrizitätsmenge. Ist z. B. in den Einheiten des C. G. S.-Systems die Stromarbeit gleich 1 und die Elektrizitätsmenge gleich 1, so hat man die Potentialdifferenz 1. Ist aber die Stromarbeit nicht gleich 1 Erg, sondern gleich $\frac{1}{3 \cdot 10^2}$ Erg, und die Elektrizitätsmenge gleich 1, so ist die Potentialdifferenz gleich $\frac{1}{3 \cdot 10^2}$ Einheiten des C. G. S.-Systems.

Diese Differenz bezeichnet man als 1 Volt. Demnach ist die Stromleistung von

$$(1 \text{ Volt}) \cdot (1 \text{ Ampère}) = \left(\tfrac{1}{3 \cdot 10^2}\right) \cdot (3 \cdot 10^9) \text{ Sek. Erg} = 10^7 \text{ Sek. Erg}$$
$$= 1 \text{ Sek. Joule} = 1 \text{ Watt},$$

und

$$\text{Anzahl der Volt gleich } \frac{\text{Sekundenleistung}}{\text{Anzahl der Ampère}},$$

oder

Anzahl der Volt gleich Sekundenleistung durch sekundliche Menge,

oder

$$\text{Anzahl der Volt gleich } \frac{\text{Arbeit}}{\text{Menge}} \text{ für beliebige Zeit } t.$$

Nun war

$$\frac{\lambda F}{l}(V_1 - V_2) = J,$$

also

$$\frac{V_1 - V_2}{J} = \frac{l}{\lambda F} = \varrho \frac{l}{F},$$

d. h. die Potentialdifferenz, die für jedes Ampère des Stromes nötig ist, ist gleich $\varrho \frac{l}{F}$.

Es war aber ϱ der spezifische Widerstand für $l = 1$ und $F = 1$. Nach dem Ohmschen Gesetze ist der wirkliche Widerstand proportional der Drahtlänge und umgekehrt proportional dem Querschnitte, und so hat man $r = \varrho \frac{l}{F}$ als Widerstand W des Drahtes zu betrachten. Dies giebt

$$\frac{\text{Potentialdifferenz}}{\text{Stromstärke}} = \text{Widerstand}, \quad \frac{D}{J} = W.$$

Die Dimension des Widerstandes ist $t \cdot \frac{l}{l^2} = tl^{-1}$, also das Umkehrte einer Geschwindigkeit.

Bringt die Potentialdifferenz 1 Volt die Stromstärke 1 Ampère hervor, so sagt man, der Widerstand sei ein Ohm.

Also ist

$$1 \text{ Ohm} = \frac{1 \text{ Volt}}{1 \text{ Ampère}} = \frac{\frac{1}{300}}{3 \cdot 10^9} = \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \text{ Widerstandseinheiten}$$

des C. G. S.-Systems.

Man merke:

Anzahl der Volt = Anzahl der Ohm mal Anzahl der Ampère;

$$\text{Anzahl der Ampère} = \frac{\text{Anzahl der Volt}}{\text{Anzahl der Ohm}},$$

$$\text{Anzahl der Ohm} = \frac{\text{Anzahl der Volt}}{\text{Anzahl der Ampère}},$$

oder, wenn D die Potentialdifferenz ist,

$$D = W \cdot J, \quad J = \frac{D}{W}, \quad W = \frac{D}{J}.$$

Aus $DJ = L$ und $\frac{J}{D} = \frac{1}{W}$ folgt durch Multiplikation noch $J^2 = \frac{L}{W}$ oder $L = J^2 \cdot W$, d. h. Leistung gleich Widerstand mal Quadrat der Stromstärke.

Ist nun A das mechanische Äquivalent der Wärme, d. h. 1 Cal. $= 4{,}2 \cdot 10^7$ Erg, also 1 Erg $= 2{,}4 \cdot 10^{-8}$ Cal. und 1 Watt $= 0{,}24$ Cal. pro Sekunde, so ergiebt sich folgendes:

Aus $L = WJ^2$ folgt, dafs der Strom in der Zeit t die Wärmemenge

$$Q = \frac{WJ^2t}{A}$$

entwickeln kann. Ist z. B. der Widerstand in Ohm, die Stromstärke in Ampère gegeben, die Leistung also in Watt, so wird in t Sekunden $0{,}24\, J^2 Wt$ Cal. Wärme erzeugt, sobald der Strom keine weitere Arbeit, weder mechanische noch sonstige leistet. Dies ist der Ausdruck für das Gesetz von Joule.

Man kann den Vorgang der Strömung im homogenen Drahte vergleichen mit der Strömung eines Flusses, der z. B. für die Horizontalstrecke l das gleichmäfsige Gefälle $(h_1 - h_2)$ hat, dessen normaler Querschnitt F überall derselbe ist, dessen Bett auf der ganzen Strecke dieselbe Beschaffenheit hat. Das Gefällverhältnis $\frac{h_1 - h_2}{l} = \tan\alpha$ kann als proportional der Geschwindigkeit v angenommen werden, die überall dieselbe ist (vgl. Theorie des Reibungswinkels, wobei $\mu = \tan\alpha$ ist). Die Tiefe des Flusses reguliert sich von selbst so, dafs die Wassermenge $F \cdot v$ der sekundlich zulaufenden Wassermenge gleich ist. Setzt man nun $v = \lambda \tan\alpha = \lambda \frac{h_1 - h_2}{l}$, so ist λ eine Art von Reibungskoeffizient, der dem Leitungskoeffizienten λ im Drahte entspricht. Er hängt ab von allerlei Widerständen, die das Flussbett darbietet, Reibungswiderstand, Unebenheiten aller Art, auf dem Grunde liegende Steine, festwurzelnde Wasserpflanzen u. dgl., so dafs λ um so kleiner ist, je mehr Hindernisse sich der Strömung entgegenstellen. (Vgl. Nr. 158 und 159.)

Welche Arbeit könnte nun der Fluſs für die Strecke l und das Gefälle $h_1 - h_2$ leisten, wenn man das letztere am Anfangspunkte der Strecke l vollständig ausnutzte und z. B. in senkrechtem Schachte einen Turbinenbetrieb anlegte, dessen Untergraben die Strecke l giebt? Die sekundliche Arbeit ist dann, da Fv die sekundliche Wassermasse vom Gewichte $F \cdot v \cdot 1$ Tonnen (technischen Maſssystems) und $(h_1 - h_2)$ die Höhe in Metern ist, theoretisch gleich

$$Fv\,(h_1 - h_2) = F \cdot \lambda \cdot \frac{h_1 - h_2}{l}\,(h_1 - h_2) \text{ Metertonnen.}$$

Im ursprünglichen Strome wird diese zur Überwindung der Hindernisse aufgebraucht, denn die Strömung ist stationär, an jeder Stelle ist die Geschwindigkeit konstant, eine Beschleunigung also findet nicht statt. Dabei kann man $F \cdot v = \lambda F \cdot \frac{h_1 - h_2}{l}$ als Stromstärke (sekundliche Wassermenge) bezeichnen. Genau so war vorher $\lambda F \cdot \frac{V_1 - V_2}{l}$ die in jeder Sekunde den Draht passierende Elektrizitätsmenge. Das spezifische Gewicht des Wassers multipliziert mit der Höhendifferenz $(h_1 - h_2)$ entspricht der Potentialdifferenz $V_1 - V_2$, das Gefällverhältnis $\frac{h_1 - h_2}{l}$ multipliziert mit dem spezifischen Gewicht 1 des Wassers entspricht dem Potentialgefälle $\frac{V_1 - V_2}{l}$. In beiden Fällen ist

Leistungsfähigkeit oder Stromarbeit gleich dem Produkte aus der sekundlichen Menge des Fluidums multipliziert mit der Potentialdifferenz.

Die ganze Arbeitsfähigkeit wird in beiden Fällen dazu aufgebraucht, sekundlich die betreffende Menge des Fluidums durch alle Hindernisse hindurchzudrängen.

Aufklärend ist auch folgendes Bild:

Zwei Wasserbecken seien durch eine Mauer voneinander getrennt. Dem oberen fließe durch einen Bach sekundlich die Wassermenge Q zu, aus dem unteren fließe ebenso viel durch einen Bach ab. Beide seien am Grunde durch ein Rohr verbunden.

Angenommen, das Rohr wäre zu weit, dann würde sich der Spiegel des oberen Teiches so lange senken, bis der Höhenunterschied $h_1 - h_2$ und damit der Arbeitsdruck klein genug ist, um nur noch die Wassermenge Q sekundlich durch das Rohr zu drängen. Dieser stationäre Zustand tritt ein, sobald die Leistungsfähigkeit $Q\,(h_1 - h_2)$ (pro Sekunde) gerade zur Überwindung der Bewegungshindernisse ausreicht.

Ist jetzt der Wasserstand des oberen Teiches für den beabsichtigten Zweck zu niedrig, so kann man ihn dadurch erhöhen, daſs man entweder die Länge des Rohres vergröfsert, was den Reibungswiderstand vermehrt, oder ein Rohr mit geringerem Durchmesser einschaltet, bei dem die gröfsere Durchflufsgeschwindigkeit, die gefordert wird, den Widerstand ebenfalls verstärkt. Jetzt steigt das Wasser so lange, bis die Leistungsfähigkeit $Q(h_1 - h_2)$ grofs genug ist, um wiederum bei stationärem Zustande zur Überwindung der Hindernisse auszureichen.

Jetzt hat man dieselbe Stromstärke (Q in der Sekunde), die sekundliche Arbeit $Q(h_1 - h_2)$ mufs aber die doppelte sein, wenn jetzt die doppelte Widerstandsarbeit zu überwinden ist. Also: bei gleicher Stromstärke ist der Höhenunterschied (Potentialdifferenz) proportional der Widerstandsarbeit. — Führt aber der Bach nur noch die Hälfte des Wassers zu, so mufs die Widerstandsarbeit halbiert werden, wenn das Niveau bleiben soll. Beides ist der obigen Formel $\frac{\text{Potentialdifferenz}}{\text{Stromstärke}} = \text{Widerstand}$ ganz analog.

E. Elektromagnetisches Mafssystem.

Während der galvanische Strom im elektrostatischen System an sich selbst gemessen wurde, wird er hier auf Grund seiner Wirkungen nach aufsen gemessen. Es handelt sich jetzt um dasselbe J, um dieselbe Potentialdifferenz $D = V_1 - V_2$, um denselben Widerstand W, die Dimensionen aber lauten anders. Aus ihrem Vergleiche ergiebt sich eine neue Gröfse v, die etwa gleich der Geschwindigkeit des Lichtes ist und als Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Wellen im Äther des Weltraumes betrachtet wird. Dafs die praktischen Einheiten Ampère, Volt und Ohm des neuen Mafssystemes trotzdem dieselben sind, wie die früheren, bedarf eines Beweises, der ebenfalls gegeben werden soll.

1) Stromstärke. Wie die Lehrbücher (vgl. Nr. 259) auf Grund des Biot-Savartschen Gesetzes beweisen, wirkt ein Kreisstrom von der Stromstärke J und der Kreisfläche F nach aufsen magnetisch wie ein Elementarmagnet vom Momente $M = \varkappa JF$. Es ist also $J = \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{M}{F}$, und man kann die Einheiten so wählen, dafs $\varkappa = 1$ wird. Dann ist also

$$J = \frac{M}{F} = \frac{\text{mgn. Moment}}{\text{Kreisfläche}},$$

und die neue Dimension von J wird nach dem früheren $\frac{l^{\frac{5}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}}{l^2} = l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$.